木村俊房 校閲
千葉克裕　訳

常微分方程式

新版

ОБЫКНОВЕННЫЕ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ

共立出版株式会社

ポントリャーギン

常微分方程式

〔新　版〕

木　村　俊　房　校閲

千　葉　克　裕　　訳

共立出版株式会社

Л. С. ПОНТРЯГИН

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования РСФСР
в качестве учебника
для государственных университетов*

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1965



日本語版への序文

常微分方程式に関するわたくしの教科書が日本語に訳されていることを知り，非常にうれしく思います。わたくしはこの教科書を通じて，学生たちが微分方程式の理論の工学への重要な応用に関心をもってくれるように努力し，重要な歴史的役割をはたしたこの理論の典型的な応用について述べました。このような趣旨が授業において共感をもって迎え入れられれば，わたくしはとてもうれしく思います。

1963年6月14日　　　　Л.С. ポントリャーギン

推 薦 の 序

本書は常微分方程式の序論ともいうべきものである．常微分方程式の初歩といえば求積法を想像するのがふつうであるが，このような既成概念は本書によって完全に打破された．

外国にもわが国にも求積法の書物は多い．しかし求積法で解き得るいろいろな型の微分方程式を探し求めるということは，理論的にも応用上からも大して重要ではない．そのようないわば偶然に解き得るような方程式を解く技巧を覚えるより，もっと重要な意味をもつ線形微分方程式の解法を述べて，その解の振動性や安定性を調べることははるかに興味のあることである．

本書では線形微分方程式のために大部分の紙数が費されている．いわゆる解法についても詳しいが，たんにそれだけに止まることなく，解の振動性や安定性についてもていねいに説明されている．また常微分方程式の基礎定理を述べてから，工学的に重要な振動論と自動制御論への応用を扱っている．記述は明快であり，楽しく読むことができる．

以上のように，常微分方程式の書物として，初学的ではあるが，まったく新しい方向を指示し，示唆に富んでいる．科学技術の進歩が目覚ましい今日，科学者にとって重要な常微分方程式について正しい知識を与えるこのような名著が，ロシヤ語に堪能な訳者によって，訳文とは思えない平明でしかも正確な日本語に翻訳されたことはまことに喜ばしい．本訳書がわが国の科学技術の進歩に寄与するところ大であろうことを信ずるものである．

1963年9月

福原 満洲雄

校閲者の序

位相幾何学，位相群論の権威として知られているポントリャーギンは微分方程式論，自動制御理論においてもソビエトの誇る指導者の一人である．また名著「位相群論」の著者として，はかり知れない影響を数学専攻の学徒に与えてきた．ここにまた本書を世に送ることによって，その恩恵を数学専攻の学徒ばかりでなく理学，工学へ進む学徒にも及ぼすことになった．

本書は，微分方程式を初めて学ぶ者を対象に，“微分方程式とは何か”から説きおこして，その理論を平明にしかも厳密に，かんで含めるように述べたものである．それでいて読者に冗長さを感じさせず，知らず知らずのうちに楽しく最後まで読ませてしまう．そしてややもすれば，退屈感をいだかせたりあるいは敬遠されがちな微分方程式の理論が，実はいかに魅力のある学問であるかを知らせるとともに，さらにその理論を究めたくなるようにしてしまう．読者の心をこのようにつかんでしまう秘密は，どんなに複雑で抽象的な概念でも手にとるようにわかりやすく説明してしまうそのうまさ，流れるような文章にあるのはもちろんだが，題材を大胆にしぼり，話を悠々と安定性の理論に進めたことにもあるであろう．さらに理論だけにとどまらず，理論とその応用の渾然たる融合を示してくれる．理論がいかにみごとに工学上に結実されるかを見て感嘆しない者はないだろう．

畏友千葉克裕兄の翻訳にささやかながら協力することによって，かかる名著をわが国の学徒に紹介できたことを心から喜ぶとともに，本書を土台としてさらに先に進まれる人の多からんことを願っている．

福原満洲雄先生にはいろいろと御助言をいただいたばかりでなく，推薦のことばまでいただいた．ここにあらためて感謝の意を表したい．

1963年9月

木村俊房

目　　次

推 薦 の 序 ……………

校閲者の序 ……………

著者より

第 1 章　序　論 ……………………………………………………… 1

§ 1　1階微分方程式……………………………………………………… 1

§ 2　いくつかの初等的な積分法 …………………………………………… 6

§ 3　存在と一意性の定理 ………………………………………………13

§ 4　一般の微分方程式系を正規形にみちびくこと ……………………18

§ 5　複素微分方程式 ……………………………………………………25

§ 6　線形微分方程式に関するいくつかの命題 …………………………31

第 2 章　定係数の線形方程式………………………………………………33

§ 7　定係数の線形同次方程式（単根の場合）……………………………34

§ 8　定係数の線形同次方程式（重根の場合）……………………………42

§ 9　安定な多項式…………………………………………………………49

§10　定係数の線形非同次方程式 …………………………………………54

§11　消　去　法……………………………………………………………59

§12　複素振幅の方法………………………………………………………67

§13　電 気 回 路……………………………………………………………71

§14　正規形の定係数線形同次方程式系…………………………………84

§15　微分方程式の自律系とその相空間…………………………………93

§16　定係数の線形同次系の相平面 ……………………………………105

第 3 章　変係数の線形方程式 ……………………………………………115

§17　正規形の線形方程式系………………………………………………115

§18　n階線形方程式 ……………………………………………………126

§19 周期係数の正規線形同次系 ……133
第4章 存在定理 ……140
§20 単独の方程式に対する存在と一意性の定理の証明 ……140
§21 正規形の方程式系に対する存在と一意性の定理の証明 ……149
§22 延長不能な解 ……162
§23 初期値とパラメータに関する解の連続性 ……167
§24 初期値とパラメータに関する解の微分可能性 ……175
§25 第1積分 ……185
第5章 安定性 ……194
§26 リャプーノフの定理 ……195
§27 遠心制御装置（ヴィシニェグラツキーの研究） ……208
§28 極限閉軌道 ……215
§29 真空管発振器 ……235
§30 2階の自律系の平衡点 ……242
§31 周期解の安定性 ……260
補章I 解析学からの2，3の準備 ……276
§32 ユークリッド空間の位相的性質 ……276
§33 陰関数に関する定理 ……290
補章II 線形代数 ……301
§34 最小多項式 ……301
§35 行列の関数 ……309
§36 行列のジョルダン標準形 ……317

訳者あとがき ……323
新版への訳者あとがき ……325
原著者小伝 ……327
索 引

著 者 よ り（新 版）

本書はモスクワ国立大学力学数学科での著者の講義をもとにして書かれたものである．わたくしは講義の材料はその場かぎりのものであったり，既成の伝統にあまりとらわれたりしてはならないという確信をもって，講義の草案をつくった．常微分方程式の特に重要かつ興味深い応用は，振動論と自動制御論に見られる．わたくしはこれらの応用という立場から，講義の材料をえらんだのである．振動論および自動制御論が現代の物質文明全体の発展にきわめて重要な役割をはたしていることは疑いのないことである．したがって，講義材料のこのようなえらびかたは，たとえそれがただ一つの可能な方法ではないにしても，少なくとも一つの合理的な方法ではあると思う．わたくしは学生たちに工学への応用に役だつ純粋に数学的な道具を与えるだけでなく，応用そのものをも例示したかったので，講義の中にいくつかの工学上の問題を取り入れた．それらは §13，27，29 に述べてある．これらの問題はわたくしの講義の重要な部分をなし，したがって本書においても全体と不可分の関係にある．

講義で述べたことがらのほかに，この本ではもっとむずかしい問題をも扱っている．それらは学生たちのセミナーで取り上げられたもので，§19，31 に述べてある．§14，22，23，24，25，30 の内容は講義では部分的に述べただけで，講義しなかったこともある．

読者の便宜のため，本文のおわりに二つの補章をつけ加えておいた．それらの内容は常微分方程式に固有のものではないが，常微分方程式の研究に本質的に利用されるものである．補章 I（旧版にはなかった）では，ユークリッド空間の中の点集合の基礎的な位相的性質が述べられ，かつ陰関数に関する定理の証明が与えられている；補章 II は線形代数にあてられている．

この改訂版では初期値およびパラメータについての解の連続性と微分可能性に関する定理があたらしい形で述べられており，さらにたくさんのこまかい改修がされている．

おわりに，わたくしの講義とその準備に，またこの本を書くときや編集にあたって，いろいろと助力されたわたくしの弟子および仕事の上での最も親しい同僚である В.Г. ボルチャンスキー氏，Р.В. ガムクリェリジェ氏，Е.Ф. ミッシェンコ氏に感謝したい．また，振動論と自動制御論の分野におけるソビエトのすぐれた専門家アレクサンドル・アレクサンドロヴィチ・アンドロノーフ氏は長年にわたってわたくしと親交を結び，わたくしの研究に非常に大きな影響を与えられたことを一言しておきたい．氏の影響は本書の性格と目的とするところに本質的に反映されている．

Л.С. ポントリャーギン

第1章

序　　論

この章ではまず，常微分方程式系とはなにか，その解とはなにか，解はいくつあるか，ということがらを中心に，これからまなぶ諸概念について説明する．解の個数に関する問題は存在と一意性の定理によって解明されるが，この定理は本章では証明しない．この定理および他の同じような型の定理の証明は第4章で与えることにする．しかし，本章ではこれらの定理をたびたび使用して，その意味を明らかにする．

このような基本的なことがらのほかに，本章ではいくつかの簡単な型の微分方程式の解法を説明する．章のおわりでは，複素微分方程式とその複素解について考察し，さらに線形微分方程式の簡単な性質を述べる．

§1.　1階微分方程式

1個または何個かの変数をもつ関数を未知関数として含むだけでなく，さらにその導関数をも含む方程式を**微分方程式**という．未知関数が多変数の関数であれば，この方程式は**偏微分方程式**とよばれ，またそうでない場合すなわちただ1個の独立変数をもつ未知関数が考えられている場合には，方程式は**常微分方程式**とよばれる．これからはつねに後者だけを扱う．

物理的な応用の際，未知関数の独立変数は時刻であることが多く，これを t であらわすならわしになっているので，今後はいつでも独立変数を t であらわすことにする．未知関数は $x, y, z, \cdots\cdots$ であらわす．t に関する導関数は原則として，関数の上に点をつけてあらわす：$\dot{x}=\dfrac{dx}{dt}$, $\ddot{x}=\dfrac{d^2x}{dt^2}$, $\cdots\cdots$. この記法が不便であったり使用できない場合には，導関数の階数は関数の右肩の括弧内の添字でしめす：たとえば $x^{(n)}=\dfrac{d^nx}{dt^n}$.

まずはじめに単独の1階微分方程式を考えることにしよう．方程式はつぎの形に書かれる：

$$F(t, x, \dot{x})=0. \tag{1}$$

ここに t は独立変数，x は t の未知関数，$\dot{x}=\dfrac{dx}{dt}$ はその導関数，F は与えられた 3 変数の関数である．関数 F はその変数のすべての値に対して定義されているとはかぎらないので，関数 F の**定義域** B が問題になる．B は $(t, x, \dot{x})$-空間の部分集合と考えられる．方程式（1）の中にある未知関数 x の導関数は1階導関数 $\dot{x}$ だけであるから，（1）は**1階**の微分方程式といわれる．

ある区間 $r_1<t<r_2$ $(r_1=-\infty,\ r_2=+\infty$ の場合もある) で定義された独立変数 t の関数 $x=\varphi(t)$ を関係式（1）の x に代入したとき，区間 $r_1<t<r_2$ で t に関する恒等式がえられるならば，$x=\varphi(t)$ を方程式（1）の**解**という．また区間 $r_1<t<r_2$ を解 $\varphi(t)$ の**定義区間**という．明らかに関係式（1）に $x=\varphi(t)$ を代入できるのは，関数 $\varphi(t)$ が区間 $r_1<t<r_2$ で1階の導関数をもつ（したがって，とくに連続な）場合だけである．$x=\varphi(t)$ を（1）に代入できるためには，さらに区間 $r_1<t<r_2$ の任意の t に対して点 $(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t))$ が関数 F の定義域 B に属することが必要である．

（1）は3個の変数 $t, x, \dot{x}$ の関係式であるが，ある場合には（1）は，変数 $\dot{x}$ を，独立変数 t, x の一価陰関数として定めていることがある．この場合には，微分方程式（1）は

$$\dot{x}=f(t, x) \tag{2}$$

の形の微分方程式と同値である．微分方程式（2）は**導関数について解かれている**といわれる．これはいろいろな点で一般の微分方程式（1）よりもいっそう扱いやすいので，今後はおもに導関数に関して解かれた方程式を考察する．したがって，関係式（2）は（1）の形の方程式を $\dot{x}$ について解いた結果えられたものとは考えず，はじめから2つの独立変数 t, x の関数 $f(t, x)$ が与えられているものと考える．

はっきりした幾何学的イメージを利用するため，(t, x)-平面 P を考えて t は独立変数として横軸に，また x は従属変数として縦軸にとることにする．微分

方程式（2）を決定する関数 f は，その変数 t, x のすべての値に対して定義されているとはかぎらない．つまり幾何学的な言葉をかりれば，f はつねに平面 P 全体で定義されているわけではなく，一般には平面 P のある集合 Γ でのみ定義されている（図 1）．集合 Γ はつねに開集合であると仮定する．すなわち Γ は，その任意の点 p とともに p を中心とするある半径（>0）の円板をも含んでいると仮定する（§32 を見よ）．また関数 f とその偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ は集合 Γ の点 (t, x) の連続関数であると仮定する．方程式（2）の解 $x=\varphi(t)$ は幾何学的には平面 P 上の曲線 $x=\varphi(t)$ をあらわすものと考える．この曲線はその各点において接線をもち，開集合 Γ の中にすっかり含まれている．これを，微分方程式（2）の**積分曲線**という．

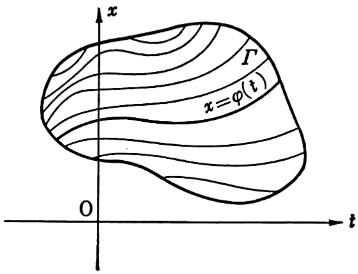


図　1

存在と一意性の定理

代数方程式の解の個数に関する定理が代数学においていかに重要な役割をはたしているかは周知のとおりである．たとえば，**代数学の基本定理**『n 次方程式はつねに n 個の根をもつ（重複度もかぞえて）』もその1つである．これとまったく同様に，微分方程式の理論においても，微分方程式が何個の解をもつかということは，理論的に重要な問題である．じつは，どんな微分方程式も無限個の解をもつことが知られている．したがって解の個数ではなく，与えられた微分方程式のすべての解をどのように書きあらわせるかが問題になる．この問題に答えるのが**存在と一意性の定理**（定理 1）である．この§ではこの定理を証明なしに述べ，証明は第4章（§20を見よ）で与えることにする．

定理 1.　『微分方程式

$$\dot{x}=f(t, x) \tag{3}$$

において，関数 $f(t, x)$ は (t, x)-平面 P のある開集合 Γ で定義されていると仮定しよう．さらに関数 f は偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ とともに開集合 Γ 全体で連続であ

ると仮定する．このとき，つぎのことがいえる：

1) Γ の任意の点 (t_0, x_0) に対して，条件

$$\varphi(t_0)=x_0 \tag{4}$$

をみたす（3）の解 $x=\varphi(t)$ が存在する．

2) もし（3）の2つの解 $x=\psi(t)$ と $x=\chi(t)$ とが少なくとも1つの値 $t=t_0$ に対して一致すれば，すなわち

$$\psi(t_0)=\chi(t_0)$$

であれば，この2つの解は双方の定義域の共通部分において恒等的に等しい』

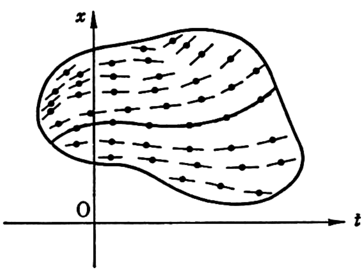


図 2

数 t_0, x_0 は解 $x=\varphi(t)$ に対する**初期値**，関係式（4）はこの解に対する**初期条件**とよばれる．また解 $x=\varphi(t)$ は**初期条件（4）をみたす**，あるいは解 $x=\varphi(t)$ は**初期値 t_0, x_0 をもつ**ともいう．解 $x=\varphi(t)$ が初期条件（4）をみたす（または初期値 t_0, x_0 をもつ）ためには，まず解 $x=\varphi(t)$ の定義区間 $r_1<t<r_2$ が点 t_0 を含んでいなければならない．

けっきょく定理1は，開集合 Γ の任意の点 (t_0, x_0) の座標は方程式（3）のある解の初期値になっているということ，また同じ初期値をもつ2つの解は一致するということをいいあらわしている．

定理1の幾何学的内容は，**開集合 Γ の各点 (t_0, x_0) をとおる方程式（3）の1つ，しかもただ1つの積分曲線が存在する**ということにほかならない（図1を見よ）．

集合 Γ の各点 (t_0, x_0) を《ただ1つの》積分曲線がとおる，というのはやや不正確な表現である．実際，ある1つの区間 $r_1<t<r_2$ 全体で定義され，方程式（3）をみたす関数 $x=\varphi(t)$ をわれわれは微分方程式（3）の解と名づけたので，この関数とともに，同じ初期値 t_0, x_0 をもち方程式（3）をみたすような別の区間 $s_1<t<s_2$ で定義された関数 $x=\psi(t)$ が存在しうる．定理

1の後半は，関数 $\varphi(t)$ と $\psi(t)$ とがそれらの定義域の共通部分において一致することを主張しているだけであって，決して2つの定義域 $r_1<t<r_2$ と $s_1<t<s_2$ とが一致することを主張しているわけではない．

2つの区間のうちの1つ——たとえば $s_1<t<s_2$——がもう1つの区間を完全に含んでいる場合，区間 $s_1<t<s_2$ で定義された解 $x=\psi(t)$ は解 $x=\varphi(t)$ の**延長**であるということにしよう．当然，解のうちで右にも左にも延長できないものが重要である．このような解は**延長不能**であるということにする．どんな解も一意的に延長不能な解にまで延長できることが容易に証明される（この証明は §22 で与える)．ここで，積分曲線とは延長不能な解のグラフのことであると考えれば，各点 (t_0, x_0) をとおる積分曲線はただ1つであるという表現は正確なものとなる．

方程式（3）の解 $x=\varphi(t)$ は関数 $\varphi(t)$ のグラフとして幾何学的に解釈したが，こんどは方程式（3）そのものに幾何学的な解釈を与えよう．集合 Γ の各点 (t, x) をとおる方向係数 $f(t, x)$ の直線 $l_{t,x}$ をひくと，方程式（3）に対応する**方向の場**がえられる．これが，この方程式の幾何学的解釈を与えるものである．

方程式の幾何学的解釈と解の幾何学的解釈との関係は，要するに**任意の積分曲線 $x=\varphi(t)$ はその上の各点 $(t, \varphi(t))$ において直線 $l_{t,\varphi(t)}$ に接する**，ということである（図 2)．

例

1. 定理1の意味（ここではその後半の）を説明するため，αを実数として，微分方程式

$$\dot{x}=\alpha x \tag{5}$$

を解いてみよう．この場合

$$f(t, x)=\alpha x$$

であるから，関数fは実際には変数xだけに関係し，その定義域は平面P全体である．関数 $f(t, x)=\alpha x$ とその導関数 $\dfrac{\partial f(t, x)}{\partial x}=\alpha$ は平面P全体で，変数 t, x の連続関数であるから，方程式（5）に定理1を適用することができる．方程式（5）に直接に代入することによって，関数

$$x=ce^{\alpha t} \quad (c\text{は任意の実定数}) \tag{6}$$

は方程式（5）の解であることがたしかめられる．この解は直線 $-\infty<t<\infty$ 全体で定義されているから，延長不能である．定数 c にあらゆる実数値を与えることにより，方程式（5）のすべての解がえられることをしめそう．そのため，$x=\varphi(t)$ をこの方程式の任意の解としたとき，適当に定数 c をえらべば $\varphi(t)=ce^{\alpha t}$ となることをしめそう．t_0 を解 $\varphi(t_0)$ の定義区間の1点とし，$x_0=\varphi(t_0)$ とする．$c=x_0e^{-\alpha t_0}$ とおくと，方程式（5）の解 $x=\varphi(t)$ と $x=ce^{\alpha t}=x_0e^{\alpha(t-t_0)}$ とは同じ初期値 (t_0, x_0) をもつから，これらは定理1の後半によって一致しなければならない．ゆえに（6）式は微分方程式（5）のすべての解をつくしている．

2. 放射性物質の崩壊過程の数学的な記述を与えてみよう．時刻 t においてまだ崩壊していない物質の量を $x(t)$ であらわす．物理的な考察によって，崩壊の速さ $\dot{x}(t)$ は（連鎖反応を起こさせるような条件がない場合には）まだ崩壊していない放射性物質の量 $x(t)$ に比例することが知られている．すなわち

$$\dot{x}(t)=-\beta x(t).$$

ただし β は放射性物質に依存する正の比例定数で，右辺の負の符号は $x(t)$ が減少することを意味している．

これは例1で考察した微分方程式である．ゆえに

$$x(t)=ce^{-\beta t}.$$

定数 c を定めるには，なんらかの初期値を指定すればよい．たとえば，もし時刻 $t=0$ における物質の量が x_0 であることがわかっていれば，$c=x_0$ であるから

$$x(t)=x_0e^{-\beta t}$$

となる．崩壊の速さは定数 β——そのディメンションは 1/sec——であらわされる．崩壊の速さはしばしば β のかわりに，いわゆる**半減期**——物質の半分が崩壊するのに要する時間——によってあらわされる．その時間を T とすれば，β と T との間の関係はつぎのようになる：$\dfrac{x_0}{2}=x_0e^{-\beta T}$ であるから，$T=\dfrac{1}{\beta}\log 2.$

§2. いくつかの初等的な積分法

微分方程式を扱うときにわれわれが当面するおもな課題は，その解を求めることである．代数学におけると同様，微分方程式の理論でも，解を求めるということはいろいろに理解される．代数学では，はじめは各次数の方程式に対して，根号を使用した一般的な解の公式を求めることに努力が傾けられた．こうしてえられたのが2次方程式の解の公式であり，3次方程式の解に関するカルダン（Cardan）の公式であり，4次方程式の解に関するフェラリ（Ferrari）の公式であった．しかしその後，5次以上の方程式に対しては根号による解の

一般公式は存在しないことが明らかになり，それからは数値係数の方程式を近似的に解くこと，および方程式の係数とその解との関係をしらべる問題が残された．微分方程式の理論でも，解くということは大体において上と似かよった経過をたどったのである．はじめは，微分方程式をいわゆる《求積法》で解くこと，すなわち解を初等関数とそれらの積分でもって書きあらわすことに努力がそそがれたが，そののちこの意味で解けるのはごく少数の型の方程式だけであることが判明し，理論の重点は解の行動に関する一般的な法則の研究に移された．この§では，いくつかの形の1階方程式の求積法による解法を説明することにしよう．

A］（完全微分方程式）方程式

$$\dot{x}=\frac{g(t,x)}{h(t,x)} \tag{1}$$

を解いてみよう．右辺の分母，分子にある関数 $h(t,x)$, $g(t,x)$ は (t,x)-平面 P 上のある開集合 Γ で定義された連続関数で，分母の $h(t,x)$ は Γ において決して0にならないものと仮定する．また $h(t,x)dx-g(t,x)dt$ は Γ 全体で完全微分式であると仮定する．これは，Γ の各点においてつぎの条件をみたすような，Γ で定義された関数 $F(t,x)$ が存在するということである：

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial x}=h(t,x),\quad \frac{\partial F(t,x)}{\partial t}=-g(t,x). \tag{2}$$

方程式（1）を形式的に

$$h(t,x)dx-g(t,x)dt=0$$

という形に書くことにしよう．この左辺は完全微分式である．このとき，方程式（1）のどんな解 $x=\varphi(t)$ に対しても等式

$$F(t,\varphi(t))=\text{const.}$$

が恒等的に成り立ち，また逆に，（任意の定数 c に対して）等式

$$F(t,x)=c \tag{3}$$

から定まる（ある区間で定義された）陰関数 $x=\varphi(t)$ はすべて方程式（1）の解であることがわかる．

このことを証明しよう．$x=\varphi(t)$ が微分方程式（1）の解であって，区間

$r_1<t<r_2$ で定義されているものとする．そうすれば，この区間の各点において

$$\dot{\varphi}(t)=\frac{g(t,\varphi(t))}{h(t,\varphi(t))},$$

すなわち

$$h(t,\varphi(t))\dot{\varphi}(t)-g(t,\varphi(t))=0$$

が成り立つ．この左辺は，（2）によって，関数 $F(t,\varphi(t))$ の t に関する導関数にほかならないから，区間 $r_1<t<r_2$ の各点において

$$\frac{d}{dt}F(t,\varphi(t))=0$$

となる．したがって，微分学のよく知られた定理により，$F(t,\varphi(t))$ はこの区間全体である定数に等しい．逆に，ある区間で定義された関数 $x=\varphi(t)$ が方程式（3）の解であったとしよう，すなわち

$$F(t,\varphi(t))=c.$$

この恒等式を t に関して微分すれば，（2）によって，

$$h(t,\varphi(t))\dot{\varphi}(t)-g(t,\varphi(t))=0$$

がえられる．これより $x=\varphi(t)$ は微分方程式（1）の解であることがわかる．

上に述べたことがらに対して，つぎのような幾何学的解釈を与えることができる：**微分方程式（1）の解はいずれも関数** $F(t,x)$ **の等高線の一部をなしている，すなわち等式（3）によって定められる．逆に，等高線の連結している部分**（つまりある区間 $r_1<t<r_2$ において定義されている方程式（3）の解のグラフのこと）**は（1）の積分曲線である．** $F(t,x)$ の等高線はいくつかの別々の曲線からなることもある．この場合，これらの曲線をひとまとめにしたものは1つの積分曲線になるのではなく，いくつかの積分曲線をよせ集めたものとなる．言い換えると，1つの定数 c が方程式（3）によって，いくつかの（ときには無限に多くの）（例3を見よ）ことなる延長不能な解を定めることがある．

B］（線形方程式）方程式

$$\dot{x}=a(t)x+b(t) \tag{4}$$

を解いてみよう．ここで $a(t), b(t)$ はある区間 $r_1<t<r_2$ ($r_1=-\infty$, $r_2=+\infty$ の場合もよい) で定義された連続関数とする．したがって，(t,x)–平面 P 上の開集合 Γ は条件 $r_1<t<r_2$ をみたす t と任意の x とを座標とする点 (t, x) の全体である．集合 Γ は，r_1 と r_2 とが有限であれば1つの帯状領域を，また，r_1, r_2 のうちのどちらか1つだけが有限ならば半平面を，r_1, r_2 がともに有限でなければ平面全体をあらわす．方程式（4）の右辺は，x に関する偏導関数とともに Γ 全体で連続であるから，（4）に対しては定理1の仮定がみたされる．t_0 を区間 $r_1<t<r_2$ のある点とし，

$$A(t)=\int_{t_0}^{t}a(\tau)d\tau \tag{5}$$

とおこう．関数 $A(t)$ は区間 $r_1<t<r_2$ 全体で定義される．このとき，方程式（4）の解はすべて

$$x=\left(x_0+\int_{t_0}^{t}e^{-A(\tau)}b(\tau)d\tau\right)e^{A(t)} \tag{6}$$

という形に書きあらわされることがわかる．ここに x_0 は任意の定数である．これらの解はいずれも区間 $r_1<t<r_2$ 全体で定義されているから延長不能である (なぜならこの区間の外では方程式（4）の右辺は定義されていないから)．

以上の命題 **B**] を証明するために，まず，公式（6）によって与えられる関数 x は方程式（4）の解であることに注意しよう．これは x を直接（4）に代入することによってたしかめられる．つぎに，（4）のすべての解は（6）の形にあらわされることを証明しよう．$x=\varphi(t)$ を区間 $s_1<t<s_2$ で定義された方程式（4）の解とする．（4）の右辺は区間 $r_1<t<r_2$ だけで定義されているので，区間 $s_1<t<s_2$ は前者に含まれなければならない．τ_0, ξ_0 を解 $x=\varphi(t)$ の初期値としよう．数 x_0 を適当にとれば公式（6）によって与えられる解が初期値 τ_0, ξ_0 をもつこと，すなわち条件

$$\left(x_0+\int_{t_0}^{\tau_0}e^{-A(\tau)}b(\tau)d\tau\right)e^{A(\tau_0)}=\xi_0 \tag{7}$$

がみたされることを示そう．そうすれば，解 $x=\varphi(t)$ は区間 $s_1<t<s_2$ 全体で解（6）に一致することが証明されたことになる (定理1を見よ)．等式（7）

は未知数 x_0 の1次方程式であり，x_0 の係数 $e^{A(\tau_0)}$ は 0 ではないので，方程式（7）は未知数 x_0 について解ける．これで B］が証明された．

参考のため，公式（6）のもっとおぼえ易い導き方を述べよう．まずはじめに，同次方程式

$$\dot{y}=a(t)y \tag{8}$$

を考える．これは完全微分方程式である（A］を見よ）．実際，上式は形式的に

$$\frac{dy}{y}-a(t)dt=0$$

と書ける．このとき対応する関数 $F(t,y)$ は

$$F(t,y)=\log|y|-A(t)$$

で与えられるから，A］によって，同次方程式（8）の解は，等式

$$\log|y|-A(t)=c_1$$

から陰関数としてきまる．これより $|y|=e^{A(t)+c_1}$，あるいは

$$y=ce^{A(t)} \tag{9}$$

がえられる．ここで c は任意の実数値を取りうる．（以上の演繹には厳密でないところがある．なぜなら関数 $h(t,y)=y$ は0になりうるので，命題 A］の条件 1）がみたされないからである．この部分の議論を厳密にすることは容易であるが，それはしないことにしよう．というのは，公式（9）はすでに証明された公式（6）の特別な場合になっているからである）．

公式（9）の助けをかりて非同次方程式（4）の解をうるには，いわゆる，**定数変化法**をもちいる．すなわち，方程式（4）の解を（9）の形で求めるのであるが，c はもはや定数ではなく，変数 t のある未知関数であると考えるのである．こう考えて（9）が方程式（4）の解だとすれば，

$$\dot{c}e^{A(t)}+ca(t)e^{A(t)}=a(t)ce^{A(t)}+b(t),$$

すなわち

$$\dot{c}e^{A(t)}=b(t)$$

がえられる．これより

$$c=\int e^{-A(\tau)}b(\tau)d\tau=x_0+\int_{t_0}^{t}e^{-A(\tau)}b(\tau)d\tau,$$

ここに x_0 は積分定数である．

例

1. 方程式

$$\dot{x}=f(t)g(x)$$

を解いてみよう．これは変数分離形の方程式とよばれている．関数 $f(t)$ は区間 $r_1<t<r_2$ で定義されかつ連続，また $g(x)$ は区間 $q_1<x<q_2$ で定義された連続関数で，この区間で0にならないものと仮定する．いま考えている方程式は形式的に

$$\frac{dx}{g(x)}-f(t)dt=0$$

と書けるから，完全微分方程式である．これに対応する関数 $F(t,x)$（A］を見よ）は

$$F(t,x)=\int_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{g(\xi)}-\int_{t_0}^{t}f(\tau)d\tau$$

で与えられる．ここに x_0 は区間 $q_1<x<q_2$ に属し，x も同じ区間内を動くものとする．また t_0 は区間 $r_1<t<r_2$ に属し，t はこの区間内を動くものとする．A］によって，上の方程式のすべての解は，等式

$$\int_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{g(\xi)}=\int_{t_0}^{t}f(\tau)d\tau+C$$

から陰関数としてきまる．

2. 方程式

$$\dot{x}=h\left(\frac{x}{t}\right)$$

を解いてみよう．この右辺は変数 x と t との比だけに関係する．これは同次形の方程式とよばれている．$h(y)$ は区間 $a_1<y<a_2$ で定義された連続関数で，$h(y)-y$ はこの区間で0にならないと仮定する．この方程式は変数変換によって解ける．すなわち未知関数 x のかわりに，$x=yt$ とおいて，あたらしい未知関数 y を導入する．そうすれば，あらたな未知関数 y に対して，方程式

$$\dot{y}t+y=h(y),$$

すなわち

$$\dot{y}=\frac{h(y)-y}{t}$$

がえられる．この方程式は変数分離形の方程式であるから，例1で説明した方法によって解ける．

3. 変数分離形の方程式

$$\dot{x}=x^2\cos t \tag{10}$$

を解いてみよう．この場合，集合 Γ は (t,x)-平面全体である．この方程式は $x>0$ と $x<0$ の場合に，例1で説明した方法によって解くことができる．これらの半平面のお

のおのにおいて

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int \cos t dt,$$

すなわち

$$-\frac{1}{x} = \sin t - c$$

がえられる．したがって (16) の解は

$$x = \frac{1}{c - \sin t}. \tag{11}$$

しかし，この公式であらわされる解のほかに，自明な解

$$x = 0 \tag{12}$$

がある．公式 (11)，(12) が方程式 (10) のすべての解をつくしていることをしめそう．(t_0, x_0) を任意の初期値とする．$x_0=0$ の場合には，解 (12) がこの初期値をもつ．また $x_0 \neq 0$ の場合には (t_0, x_0) を初期値にもつ解は (11) で，定数 c の値は

$$c = \sin t_0 + \frac{1}{x_0}$$

である．解 (12) は区間 $(-\infty, +\infty)$ で定義されているから延長不能である．まったく同様に，$|c|>1$ の場合，公式 (11) は区間 $(-\infty, +\infty)$ 全体で定義された1つの延

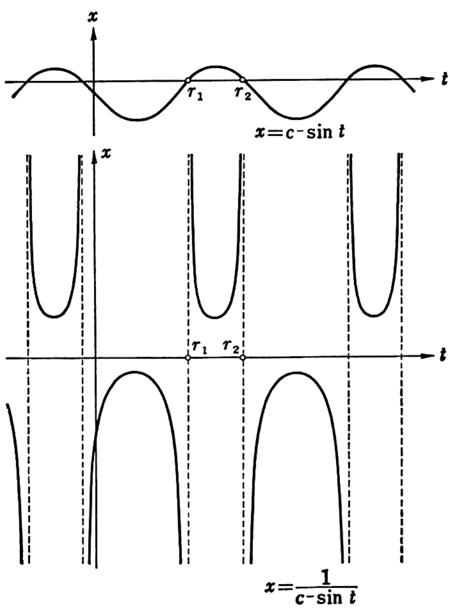


図 3

長不能な解を与える．不等式 $|c|\leqq 1$ をみたす固定された定数 c に対しては，公式 (11) は1つの解ではなく無限に多くの解を与えている．この場合1つ1つの解は区間 $r_1<t<r_2$ で定義されている．ただし，r_1, r_2 は関数 $\sin t-c$ の互いにとなりあう 2 つの零点である（図 3）.

4. 定理1の方程式（3）の右辺が連続な導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ をもたない場合には，定理1の後半（一意性）は必らずしも成り立たないことをしめそう．方程式

$$\dot{x}=3x^{2/3} \tag{13}$$

を考える．この右辺は x のすべての値に対して定義されかつ連続であるが，その導関数 $2x^{-1/3}$ は $x=0$ において不連続である．いま平面 P から直線 $x=0$ を取りのぞいてえられる集合を Γ と考えれば，方程式 (13) に定理1が適用できて，半平面 $x>0$, $x<0$ のおのおのにおいて方程式 (13) を例の1で説明した方法によって解くことができる．この方法で方程式 (13) を解いて，$x^{1/3}=t-c$ すなわち

$$x=(t-c)^3 \tag{14}$$

がえられる．関数 (14) のグラフの一部分（$t<c$ のときの）は半平面 $x<0$ の中にあり，他の部分（$t>c$ のときの）は半平面 $x>0$ の中にある．しかし，ただちにわかるように，関数 (14) は区間 $-\infty<t<+\infty$ 全体で定義された (13) の解である．と同時に $x\equiv 0$ もまた方程式 (13) の解である．このように直線 $x=0$ の各点 $x=0$, $t=c$ をすでに2つの解 (14) と $x=0$ とがとおっている（図 4）．これで，方程式 (13) に対しては定理1の後半（一意性）が成り立たないことがわかった．

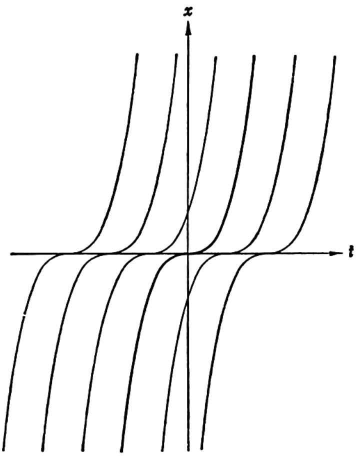


図 4

§3. 存在と一意性の定理

§1 では単独の1階微分方程式を考察し，かつこの方程式に対して存在と一意性の定理を述べた．常微分方程式の理論では，もっと一般に方程式系もとり扱われる．ふつう常微分方程式系は，その中に含まれている未知関数の個数と同じ個数の方程式からなり，未知関数はすべて同一の独立変数の関数である．

存在と一意性の定理はこの場合にも，与えられた微分方程式系を研究するための理論的な基礎になる．

存在と一意性の定理は，見掛けの上ではいくらか特別な形の方程式系に対して証明されるが，その理由はかなり一般な形の方程式系がこのような方程式系に帰着されるからである．ここで述べる特別な型の微分方程式系をこれからは正規形と名づけることにする．さて，**正規形**の常微分方程式系とは

$$\dot{x}^i=f^i(t, x^1, x^2, \cdots, x^n), \qquad i=1, \cdots\cdots, n, \tag{1}$$

の形の方程式系のことである．ここで t は独立変数，$x^1, \cdots\cdots, x^n$ は変数 t の未知関数，$f^1, \cdots\cdots, f^n$ は $(n+1)$-次元の $(t, x^1, \cdots\cdots, x^n)$-空間のある**開集合** Γ で定義された $n+1$ 個の変数の関数である．以後，関数

$$f^i(t, x^1, x^2, \cdots\cdots, x^n), \qquad i=1, \cdots\cdots, n, \tag{2}$$

はつねに開集合 Γ で連続であると仮定する．さらに，それらの偏導関数

$$\frac{\partial f^i(t, x^1, x^2, \cdots\cdots, x^n)}{\partial x^j}, \qquad i, j=1, \cdots\cdots, n, \tag{3}$$

も開集合 Γ で連続であると仮定する．注意すべきことは，連続性が仮定される偏導関数（3）は変数 $x^1, \cdots\cdots, x^n$ に関する導関数だけであって，独立変数 t に関する導関数ではないということである．

方程式（1）の**解**とは，ある区間 $r_1<t<r_2$ で定義され，かつ系（1）をみたす連続関数の系

$$x^i=\varphi^i(t), \qquad i=1,\ 2, \cdots\cdots, n, \tag{4}$$

のことである．区間 $r_1<t<r_2$ は解（4）の**定義区間**とよばれる（$r_1=-\infty$, $r_2=+\infty$ の場合もありうる）．関数の系（4）が方程式系（1）をみたすとは，関係式（1）において $x^1, x^2, \cdots\cdots, x^n$ をそれぞれ $\varphi^1(t), \cdots\cdots, \varphi^n(t)$ でおきかえたとき，関係式（1）が区間 $r_1<t<r_2$ で t に関する恒等式となることである．このおきかえができるためには，（4）の関数が区間 $r_1<t<r_2$ の各点で微係数をもち，かつ方程式（1）の右辺はそれに代入されるすべての値に対して定義されていることが必要である．したがって，点

$$(t, \varphi^1(t), \cdots\cdots, \varphi^n(t))$$

は区間 $r_1<t<r_2$ のすべての t に対して集合 Γ に属さねばならない．

ここで正規形の方程式系（1）に対する存在と一意性の定理を述べよう（証明は §21 で与える）．

定理 2. 『正規形の常微分方程式系（1）の右辺はある開集合 Γ で定義され，かつ関数（2），（3）はこの集合で連続であると仮定する．このときつぎのことが成り立つ：集合 Γ の各点

$$t_0,\ x_0^1,\ x_0^2,\ \cdots\cdots,\ x_0^n \tag{5}$$

に対して，t_0 を含むある区間で定義された（1）の解

$$x^i=\varphi^i(t)\ ;\quad i=1,\cdots\cdots,n, \tag{6}$$

で，条件

$$\varphi^i(t_0)=x_0^i\ ;\quad i=1,\cdots\cdots,n, \tag{7}$$

をみたすものが存在する．さらにまた，つぎのことがいえる：方程式系（1）の2つの解

$$\left.\begin{aligned} x^i&=\psi^i(t)\ ;\quad i=1,\cdots\cdots,n,\\ x^i&=\chi^i(t)\ ;\quad i=1,\cdots\cdots,n,\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

がそれぞれ点 t_0 を含む区間で定義され，かつ

$$\psi^i(t_0)=\chi^i(t_0)=x_0^i\ ;\quad i=1,\cdots\cdots,n, \tag{9}$$

ならば，この2つの解は双方の定義区間の共通部分で恒等的に一致する』

値（5）は解（6）に対する**初期値**といわれ，関係式（7）はこの解に対する**初期条件**といわれる．今後は解（6）が**初期値（5）をもつ**，あるいは**初期条件（7）をみたしている**，ということにする．けっきょく正規形の方程式系に対する存在と一意性の定理は，簡単につぎのように述べられる：**いかなる初期値（5）に対しても，点 t_0 を含むある区間で定義されかつ（5）を初期値にもつような系（1）の解がつねに存在する．また同一の初期値（5）をもつ2つの解**（t_0 を含み，それぞれに固有な区間で定義されている）**はそれぞれの定義区間の共通部分において一致する．**

§2 におけるのとまったく同様に，ここで延長不能な解という概念を導入しよう．

A]

$$x^i=\varphi^i(t), \qquad i=1, \cdots\cdots, n, \tag{10}$$

は方程式系（1）の解で区間 $r_1<t<r_2$ で定義されているものとし，

$$x^i=\psi^i(t), \qquad i=1, \cdots\cdots, n, \tag{11}$$

もやはり方程式系（1）の解で区間 $s_1<t<s_2$ で定義されているものとしよう．もしも区間 $s_1<t<s_2$ が区間 $r_1<t<r_2$ を含み（すなわち $s_1\leqq r_1$, $r_2\leqq s_2$）かつ区間 $r_1<t<r_2$ において解 (10) と解 (11) とが一致すれば，解 (11) は解 (10) の**延長**であるということにする．とくに，2つの解が完全に一致する場合にも，すなわち $s_1=r_1$, $r_2=s_2$ のときにも，解 (11) は解 (10) の延長であると考えることにする．解 (10) が**延長不能**であるというのは，この解の真の延長は一つも存在しないことである．容易に証明されるように（§22, A］を見よ），どんな解も延長不能な解にまで一意的に延長される．

ここで，もう1つの存在定理を述べよう．この証明は §21 で与えることにする．

定理 3. 『正規形の線形方程式系

$$\dot{x}^i=\sum_{j=1}^{n} a_j^i(t)x^j+b^i(t), \qquad i=1, \cdots\cdots, n, \tag{12}$$

の係数 $a_j^i(t)$ および自由項 $b^i(t)$ は，ある区間 $q_1<t<q_2$ で定義された独立変数 t の連続関数であると仮定する．このとき任意の初期値

$$t_0, x_0^1, x_0^2, \cdots\cdots, x_0^n \quad (q_1<t_0<q_2) \tag{13}$$

に対して，この初期値をもち区間 $q_1<t<q_2$ 全体で定義された方程式 (12) の解が存在する』

とくに系 (12) の係数と自由項とが数直線全体で定義されている場合，すなわち $q_1=-\infty$, $q_2=+\infty$ のときは，任意の初期値に対して，無限区間 $-\infty<t<+\infty$ 全体で定義された系 (12) の解が存在する．

正規系（1）の解は幾何学的には $(n+1)$-次元の $(t, x^1, \cdots\cdots, x^n)$-空間内の曲線――積分曲線――をあらわすと解釈される（§1 とくらべてみよ）．したがって，積分曲線の方程式は（1）の解によって

$$x^i=\varphi^i(t), \qquad i=1,\cdots\cdots,n,$$

と書かれる.

系（1）それ自体は $(n+1)$-次元空間での方向場を考えることによって幾何学的に解釈される（§1 とくらべてみよ).

例

1. 正規形の線形方程式系

$$\dot{x}=-\omega y, \qquad \dot{y}=\omega x \tag{14}$$

を解いてみよう. この場合, 集合 Γ は3次元の (t,x,y)-空間全体である. 容易にたしかめられるように, c_1,c_2 を任意の定数とするとき, 関数系

$$x=c_1\cos(\omega t+c_2), \qquad y=c_1\sin(\omega t+c_2) \tag{15}$$

は (14) の解である. 任意の解は, 適当に定数 c_1,c_2 をえらぶことにより, 公式 (15) によってえられることをしめそう. それには, 与えられた初期値 t_0,x_0,y_0 に対し, 解 (15) の中にこの初期値をもつものがあることをしめせばよい. 定数 c_1,c_2 に対して, 条件

$$c_1\cos(\omega t_0+c_2)=x_0, \qquad c_1\sin(\omega t_0+c_2)=y_0 \tag{16}$$

がえられる. いま (ρ,φ) を点 (x_0,y_0) の極座標とする. すなわち

$$x_0=\rho\cos\varphi, \qquad y_0=\rho\sin\varphi.$$

このとき, 方程式 (16) はつぎの形に書きかえられる：

$$c_1\cos(\omega t_0+c_2)=\rho\cos\varphi, \qquad c_1\sin(\omega t_0+c_2)=\rho\sin\varphi.$$

ゆえに

$$c_1=\rho, \qquad c_2=\varphi-\omega t_0$$

とおけば, 明らかに条件 (16) がみたされる. ゆえに各点 (t_0,x_0,y_0) を公式 (15) であらわされる解がとおる. したがって定理2（一意性）により, 公式 (15) はすべての解をあらわしている.

2. もし方程式系（1）の右辺（2）が k 回連続微分可能, すなわちすべての変数 t, $x^1,\cdots\cdots,x^n$ について k 階の導関数が連続であれば*), 系（1）の解（4）の $(k+1)$-階の導関数が存在しかつ連続であることをしめそう.

実際, 解（4）に対してはつぎの恒等式が成り立つ：

$$\dot{\varphi}^i(t)=f^i(t,\varphi^1(t),\cdots\cdots,\varphi^n(t)), \qquad i=1,\cdots\cdots,n. \tag{17}$$

もし（2）が1回連続微分可能ならば, 恒等式 (17) の右辺は t に関して連続な導関数をもつ. ゆえに関数 $\ddot{\varphi}^i(t)$ が存在しかつ連続である. 恒等式 (17) を k 回微分することによって, 関数 $\varphi^i(t)$ の $2,3,\cdots\cdots,k+1$ 階の導関数がすべて存在し, かつ連続であることが順次にわかる.

---

*) 訳注：$\dfrac{\partial^k f}{\partial(x^i)^s\partial(x^j)^p}$, $\dfrac{\partial^k f}{\partial t^s\partial(x^i)^p}$ $(s+p=k)$ などをも含めて.

§4.　一般の微分方程式系を正規形にみちびくこと

まえの§では正規形の常微分方程式系に対する存在と一意性の定理を述べたが，ここでは一般の微分方程式系を正規形に変換する方法を説明する．したがって，一般の方程式系に対しても存在と一意性の定理を述べることができる．

はじめに微分方程式系の一般形についての概念を与えよう．

独立変数 t をもつ1つの未知関数 x に対しては，ふつう1つの方程式が考察され，それはつぎの形に書くことができる：

$$F(t, x, \dot{x}, \cdots\cdots, x^{(n)})=0. \tag{1}$$

ここで F は与えられた $n+2$ 個の変数の関数である．関数 F はその変数のすべての値に対して定義されているとはかぎらないので，関数 F が定義されている領域 B が問題になる．B は $(n+2)$-次元の $(t, x, \dot{x}, \cdots\cdots, x^{(n)})$-空間内の開集合である．微分方程式に含まれている導関数の階数の最大のものが n に等しい場合，方程式は n 階であるといわれる．ある区間 $r_1<t<r_2$ で定義された独立変数 t の連続関数 $x=\varphi(t)$ があって，これを方程式（1）に代入したとき，区間 $r_1<t<r_2$ で t に関する恒等式がえられるならば，$x=\varphi(t)$ は方程式（1）の解であるという．明らかに関係式（1）に $x=\varphi(t)$ を代入できるのは，関数 $\varphi(t)$ がその定義区間 $r_1<t<r_2$ 全体で n 階（を含めて）までの導関数をもつ場合にかぎる．関係式（1）に $x=\varphi(t)$ を代入できるためには，さらに点 $(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t), \cdots\cdots, \varphi^{(n)}(t))$ が区間 $r_1<t<r_2$ の任意の t に対して関数 F の定義域 B に属することが必要である．

同一の独立変数をもつ2つの未知関数がある場合には，2つの微分方程式が考察され，これら2つが方程式系をつくる．この系はつぎの形に書くことができる：

$$\left.\begin{aligned} F(t, x, \dot{x}, \cdots\cdots, x^{(m)}, y, \dot{y}, \cdots\cdots, y^{(n)})=0, \\ G(t, x, \dot{x}, \cdots\cdots, x^{(m)}, y, \dot{y}, \cdots\cdots, y^{(n)})=0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

ここで t は独立変数，x, y は t の未知関数，F, G はいずれもある開集合 B で定義された $m+n+3$ 個の変数の関数である．系（2）に含まれている関数 x の導関数の階数の最大のものが m に等しく，また系（2）に含まれている関数

y の導関数の階数の最大のものが n に等しい場合，m は系（2）の x **に関する階数**，n は系（2）の y **に関する階数**とよばれ，また $m+n$ は系（2）の**階数**とよばれる．ある区間 $r_1<t<r_2$ で定義された連続関数 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ があって，これらを関係式（2）に代入したとき区間 $r_1<t<r_2$ 全体で t に関する恒等式がえられる場合に，$x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ は系（2）の**解**であるという．この場合にも，単独の方程式の場合と同様，系（2）に $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ を代入できるための条件がみたされていなければならない．

同様に，同一の独立変数をもつ3個またはそれ以上の未知関数を含む微分方程式系が定義される．微分方程式系の未知関数が $x^1, \cdots\cdots, x^n$ であって，この系における x^i の導関数の階数の最大のものが $q_i(i=1, \cdots\cdots, n)$ に等しい場合，q_i はこの系の x^i **に関する階数**とよばれ，$q=q_1+q_2+\cdots\cdots+q_n$ はこの系の**階数**とよばれる．したがって §3 の正規系（1）の階数は n である．

もし関係式（1）を $x^{(n)}$ について解くことができれば，方程式（1）はつぎの形に書きかえられる：

$$x^{(n)}=f(t, x, \dot{x}, \cdots\cdots, x^{(n-1)}). \tag{3}$$

まったく同様に，もし系（2）を $x^{(m)}$ と $y^{(n)}$ とについて解くことができれば，この系はつぎの形に書きかえられる：

$$\left.\begin{aligned} x^{(m)}&=f(t, x, \dot{x}, \cdots\cdots, x^{(m-1)}, y, \dot{y}, \cdots\cdots, y^{(n-1)}), \\ y^{(n)}&=g(t, x, \dot{x}, \cdots\cdots, x^{(m-1)}, y, \dot{y}, \cdots\cdots, y^{(n-1)}). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

方程式（3）および系（4）は，**最高階数の導関数について解かれている**といわれる．同じように，任意個数の未知関数を含みその最高階数の導関数について解かれている系が定義される．とくに §3 の正規系（1）は最高階数の導関数について解かれている．今後はおもに最高階数の導関数について解かれている系だけを考察する．

さて，最高階数の導関数について解かれている階数 n のどんな微分方程式系も，階数 n の正規系にすることができることをしめそう．はじめに単独の n 階方程式を n 階の正規形に変換する方法をしめそう．

A〕 最高階数の導関数について解かれている単独の n 階微分方程式を

$$y^{(n)}=f(t, y, \dot{y}, \cdots\cdots, y^{(n-1)}) \tag{5}$$

とする．ここに t は独立変数，y は t の未知関数，$f(t, y, \dot{y}, \cdots\cdots, y^{(n-1)})$ は $(n+1)$-次元空間のある開集合 Γ で定義された変数 $t, y, \dot{y}, \cdots\cdots, y^{(n-1)}$ の関数である．また関数 $f(t, y, \dot{y}, \cdots\cdots, y^{(n-1)})$ も，その偏導関数

$$\frac{\partial f(t, y, \dot{y}, \cdots\cdots, y^{(n-1)})}{\partial y^{(k)}} \qquad (k=0, 1, \cdots\cdots, n-1)$$

(ただし $y^{(0)}=y$ とする）も Γ で連続であると仮定する．方程式（5）を正規形の方程式系にするため，t を独立変数とするあたらしい未知関数 $x^1, x^2, \cdots\cdots, x^n$ をつぎの等式によって導入する：

$$x^1=y,\ x^2=\dot{y}, \cdots\cdots, x^n=y^{(n-1)}. \tag{6}$$

このとき，方程式（5）はつぎの系と同値になる：

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{x}^1=x^2,\\
&\dot{x}^2=x^3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\dot{x}^{n-1}=x^n,\\
&\dot{x}^n=f(t, x^1, x^2, \cdots\cdots, x^n).
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

このことから定理2によって，集合 Γ の各点 $(t_0, y_0, \dot{y}_0, \cdots\cdots, y_0^{(n-1)})$ に対して，方程式（5）の解 $y=\psi(t)$ で初期条件

$$\psi^{(k)}(t_0)=y_0^{(k)}, \qquad k=0, 1, \cdots\cdots, n-1,$$

をみたすもの，すなわち初期値

$$t_0, y_0, \dot{y}_0, \cdots\cdots, y_0^{(n-1)} \tag{8}$$

をもつものが存在する．さらに初期値（8）をもつ任意の2つの解は，それらの定義区間の共通部分において一致する．方程式（5）が線形すなわち関数 f が変数 $y, \dot{y}, \cdots\cdots, y^{(n-1)}$ に関する1次式であって，その係数が区間 $q_1<t<q_2$ で定義されかつ連続である場合には，任意の初期値 $t_0, y_0, \dot{y}_0, \cdots\cdots, y_0^{(n-1)}$（ここに $q_1<t_0<q_2$）に対して，区間 $q_1<t<q_2$ 全体で定義された解 $y=\psi(t)$ が存在する．

さて，方程式（5）と系（7）とが同値であることを証明しよう．関数 y が方程式（5）の解であれば，関係式（6）によって定義される関数 $x^1, \cdots\cdots, x^n$

は系（7）の解であることを証明しよう．あたらしい未知関数 $x^1, \cdots\cdots, x^n$ を導入する関係式（6）を微分することによって，

$$\dot{x}^k = y^{(k)}\ ;\quad k=1, \cdots\cdots, n-1, \tag{9}$$

$$\dot{x}^n = y^{(n)}, \tag{10}$$

がえられる．関係式（9）の右辺を関係式（6）でおきかえ，関係式（10）の右辺を関数 y がみたす方程式（5）でおきかえれば，系（7）がえられる．逆に，関数 $x^1, \cdots\cdots, x^n$ が系（7）の解であれば，x^1 を y と考えると，関数 y は方程式（5）の解になることをしめそう．系（7）の1番目の方程式において $x^1=y$ とおけば，$x^2=\dot{y}$ をうる．系（7）の2番目の方程式において x^2 を $\dot{y}$ でおきかえれば，$x^3=\ddot{y}$ をうる．このことをさらに続けて，関係式（6）に到達する．最後に系（7）の最後の方程式において各関数 $x^1, \cdots\cdots, x^n$ を（6）式でおきかえれば，y に対する方程式（5）がえられる．

関数 f は集合 Γ で定義されているから，系（7）の右辺は変換（6）によってもやはり集合 Γ で定義される．系（7）に対しては，定理2の条件が集合 Γ で成り立つから，初期値 $t_0, x_0^1, x_0^2, \cdots\cdots, x_0^n$ を Γ から任意にとることができる．これらの初期値は変換（6）によって，方程式（5）に対する初期値

$$t_0,\ y_0,\ \dot{y}_0, \cdots\cdots, y_0^{(n-1)},$$

となる．方程式（5）が線形であれば，系（7）もまた線形である．このことから，定理3によって **A**］の最後の部分がみちびかれる．これで **A**］が証明された．

A］で述べた方法によって，最高階数の導関数について解かれている任意の微分方程式系を正規形にすることが可能になる．たくさんの式で議論を複雑にしないために，以下の **B**］では2つの方程式からなる4階の方程式系を考察しよう．

B］　2個の2階方程式からなる系：

$$\left.\begin{aligned}\ddot{u}&=f(t, u, \dot{u}, v, \dot{v}),\\ \ddot{v}&=g(t, u, \dot{u}, v, \dot{v}),\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

を考えよう．ここに t は独立変数，u, v は t の未知関数である．あたらしい未知関数を次式：

$$x^1=u,\quad x^2=\dot{u},\quad x^3=v,\quad x^4=\dot{v},$$

によって導入することにより，系 (11) はつぎのような正規形の方程式系に変換される：

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}^1&=x^2,\\ \dot{x}^2&=f(t, x^1, x^2, x^3, x^4),\\ \dot{x}^3&=x^4,\\ \dot{x}^4&=g(t, x^1, x^2, x^3, x^4).\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

もし方程式 (11) の右辺の関数 f, g が5次元の $(t, u, \dot{u}, v, \dot{v})$-空間でのある開集合 Γ で定義された連続関数であって，変数 $u, \dot{u}, v, \dot{v}$ に関する1階の偏導関数も連続であれば，正規系 (12) は Γ において定理 2 の条件をみたす．このことから容易にわかるように，Γ の任意の点 $(t_0, u_0, \dot{u}_0, v_0, \dot{v}_0)$ に対して，系 (11) の解 $u=\varphi(t)$, $v=\psi(t)$ でつぎの初期条件をみたすものが存在する：

$$\varphi(t_0)=u_0,\quad \dot{\varphi}(t_0)=\dot{u}_0,$$
$$\psi(t_0)=v_0,\quad \dot{\psi}(t_0)=\dot{v}_0.$$

また同じ初期条件をもつ解はすべて，それらの定義区間の共通部分において一致する．

B］の証明は **A**］の証明とまったく同様におこなわれる．

1個の n 階方程式が未知関数の最高階数の導関数 $y^{(n)}$ について解かれてはいない形：

$$F(t, y, \dot{y}, \cdots\cdots, y^{(n)})=0\tag{13}$$

で与えられている場合には，まずはじめに，これを $y^{(n)}$ について解くことができるかどうかが問題になる．これは微分方程式論の問題ではなく，むしろ関数論の分野のものと考えられるが，同時にまた微分方程式論でとり上げられるようないくつかの問題をも含んでいる．それは，たとえばつぎのようなものである：方程式 (13) が変数 $y^{(n)}$ の2次式であれば，それは残りの変数の2価関数 $y^{(n)}$ を定める．2つの値が実際に異なるところでは，実質的に（5）の

形の2つの異なる方程式をうるが，方程式 (13) によって定められる関数 $y^{(n)}$ の2つの値が合致してしまうようなところでは，(5) の形をした2つの方程式への分解は不可能であり，方程式 (13) そのものを考えないわけにはいかなくなる．このような方程式を研究するためには，**特異解**の概念の導入と曲面上の方程式の考察とが必要になる．しかし，これらの問題はこの本では考えない．

例

1. 方程式

$$\ddot{x}+\omega^2x=0 \quad (\omega \text{は正の定数}) \tag{14}$$

を解こう．すぐにたしかめられるように，r, α を任意の定数とするとき，関数

$$x=r\cos(\omega t+\alpha) \quad (r\geqq 0) \tag{15}$$

は方程式 (14) をみたす．公式 (15) がすべての解をあらわしていることをしめそう．$x=\varphi(t)$ を方程式 (14) の任意の解とする．定理3によって解 $x=\varphi(t)$ はすべての t に対して定義されていると考えてよい (**A**] のおわりの部分を見よ)．いま $\varphi(0)=x_0$, $\dot{\varphi}(0)=\dot{x}_0$ とおく．このとき容易に $r\cos\alpha=x_0$, $-r\omega\sin\alpha=\dot{x}_0$ となるような定数 r, α をえらぶことができる．そうすれば解 (15) と $\varphi(t)$ とは同一の初期値 $0, x_0, \dot{x}_0$ をもつから両者は一致する (**A**] を見よ)．

関数 (15) は**調和振動**をあらわし，正の定数 r は振動 (15) の**振幅**，α は**初期位相**または単に**位相**とよばれる．また方程式 (14) を調和振動の方程式という．ω は**振動数**とよばれているが，1秒間の実際の振動数は公式

$$\nu=\frac{\omega}{2\pi}$$

で与えられる．

2. 質量 m の点 p がつぎのような力 F の作用をうけながら水平な直線 l 上を運動している場合を考えよう：力 F は点 p をこの直線上の点 o に引きつけ，その大きさは点 p と点 o との距離に比例する．

点 p の運動の方程式をたてるため，点 o を原点にとって，直線 l 上に座標を導入しよう．時刻とともに変化する点 p の座標を $x=x(t)$ であらわす．ニュートン (Newton) の第2法則によって，点 p の運動の方程式はつぎのようになる：

$$m\ddot{x}=F=-kx.$$

この方程式はふつうつぎの形に書きあらわされる：

$$m\ddot{x}+kx=0. \tag{16}$$

物理的には，力 F はバネで実現され，k はこのバネの**弾性係数**とよばれる (図 5)．公式 (15) によれば，方程式 (16) の解は

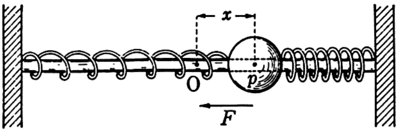


図 5

$$x=r\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\alpha\right)\quad(r\geqq 0)$$

と書ける．ゆえに点pの振動数$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$は質量$m$とバネの弾性係数$k$とによってきまり，初期条件には関係しない．しかし振動の振幅rとその初期位相αは，初期条件すなわち $t=0$ のときの点pの位置 x_0 とその速さ $\dot{x}_0$ に関係する．

3. **数学的振子**の方程式をたてて，それを近似的に解いてみよう．数学的振子とは，重力の作用をうけながら鉛直な平面内にある半径 l の円周K上を運動する質量mの点pのことである．値 l は振子の長さといわれる．いまKの最低点Oを座標の原点にとって，円周K上に角座標を導入する（図 6)．時刻とともに変化する点 p の座標を $\varphi=\varphi(t)$ であらわそう．点 p は鉛直に下に向かう重力 $P=mg$ の作用をうけている．この力の法線方向の成分は，点pを円運動させるための束縛力とつり合い，点pにおける円の接線方向（角φが増加する方向を正とする）の成分は $-mg\sin\varphi$ である．このことから，点pの運動の方程式はつぎのようになる：

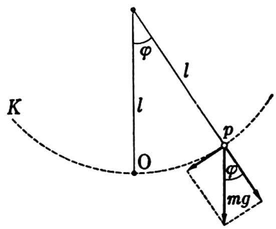


図 6

$$ml\ddot{\varphi}=-mg\sin\varphi,\qquad \text{すなわち}\quad l\ddot{\varphi}+g\sin\varphi=0. \tag{17}$$

この方程式は線形ではないので，これを解くのは非常にむずかしい．しかし，点pの座標φが運動中つねに0から少ししかズレないものと仮定すれば，方程式 (17) の $\sin\varphi$ を近似的にφでおきかえることができ，振子の《近似》線形方程式：

$$l\ddot{\varphi}+g\varphi=0$$

がえられる．この解は

$$\varphi=r\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t+\alpha\right)$$

である（(15) を見よ)．こうして，《小さな振動》をする振子の振動数は，公式

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$$

によって与えられる．

小さな振動をする振子の1秒間の振動数νは，公式

$$\nu=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

によって与えられる．たとえば，**1秒振子**すなわち1秒間に1往復の振動 ($\nu=1$) をおこなう振子の長さはつぎの公式によって定められる：

$$l=\frac{g}{4\pi^2}\approx 0.25\ \text{m}.$$

§5. 複素微分方程式

いままでは実方程式とそれらの実解だけを考察してきたが，ある場合たとえば定係数の線形方程式を解く場合には，はじめに実方程式の複素解を見つけ，つぎにそれらの中から実解をえらび出すほうが容易なことも多い．この方法を述べるには，実変数の複素関数と複素微分方程式系の概念を導入する必要がある．

A〕 ある区間 $r_1<t<r_2$ を動く変数 t のおのおのの値に，複素数

$$\chi(t)=\varphi(t)+i\psi(t)$$

が対応しているとき，実変数 t の**複素関数** $\chi(t)$ が定義されているという．ここに $\varphi(t)$ および $\psi(t)$ は実変数 t の実関数である．関数 $\varphi(t)$ は複素関数 $\chi(t)$ の**実部**とよばれ，関数 $\psi(t)$ は**虚部**とよばれる．もし関数 $\varphi(t)$ と $\psi(t)$ とが連続であれば，複素関数 $\chi(t)$ は**連続**であるといわれる．まったく同様に関数 $\varphi(t)$ と $\psi(t)$ とが微分可能な関数であれば，複素関数 $\chi(t)$ は**微分可能**であるといわれる．複素関数 $\chi(t)$ の**導関数** $\dot{\chi}(t)$ は

$$\dot{\chi}(t)=\dot{\varphi}(t)+i\dot{\psi}(t)$$

によって定義される．実変数の2つの複素関数の和，積および商に対して通常の微分法の公式が成り立つことはただちにたしかめられる．

B〕 正規形の微分方程式系

$$\dot{z}^j=h^j(t, z^1, \cdots\cdots, z^n), \qquad j=1, \cdots\cdots, n, \tag{1}$$

を考え，右辺の関数 $h^j(t, z^1, \cdots\cdots, z^n)$ は複素変数 $z^1, \cdots\cdots, z^n$ の関数であると仮定しよう．ここではとくにこれらの関数は変数 $z^1, \cdots\cdots, z^n$ の多項式であって，それらの係数は区間 $q_1<t<q_2$ で定義された実変数 t の連続な実または複素関数である場合に話をかぎることにする．このような条件のもとでは，系（1）の複素解を求めるという問題ははっきりした意味をもつ．すなわち区間 $r_1<t<r_2$ で定義された実変数 t の複素関数系

$$z^j=\chi^j(t), \qquad j=1, \cdots\cdots, n, \tag{2}$$

が系（1）の解であるというのは，（1）の変数 z^j を（2）の関数でおきかえたとき，この区間で t に関する恒等式系がえられることである．仮定より方程

式（1）の右辺は $z^1, \cdots\cdots, z^n$ に関する多項式であるから，変数 $z^1, \cdots\cdots, z^n$ のすべての値に対して定義されている．このときにも，系（1）に対してつぎの存在と一意性の定理が成り立つ：

$$t_0, z_0^1, z_0^2, \cdots\cdots, z_0^n$$

を任意の初期値とする．すなわち $z_0^1, \cdots\cdots, z_0^n$ は任意の複素数，t_0 は条件 $q_1 < t_0 < q_2$ をみたす任意の実数とする．そのとき，系（1）の解

$$z^j = \chi^j(t), \qquad j=1, \cdots\cdots, n,$$

で，初期条件

$$\chi^j(t_0) = z_0^j, \qquad j=1, \cdots\cdots, n,$$

をみたすものが存在する．また，同一の初期条件をもついかなる2つの解もそれらの定義区間の共通部分において一致する．

系（1）が線形すなわち多項式 h^j が $z^1, \cdots\cdots, z^n$ の1次式である場合には，任意の初期値に対して，区間 $q_1 < t < q_2$ 全体を定義区間とする（1）の解が存在する．

正規形の複素微分方程式系に対するこの存在と一意性の定理は，未知複素関数 z^j のそれぞれをその実部と虚部とに分解することによって，定理2からただちにみちびかれる．実際，

$$z^j = x^j + iy^j, \qquad j=1, \cdots\cdots, n, \tag{3}$$

とおいて，系（1）の変数 z^j $(j=1, \cdots\cdots, n)$ を（3）式でおきかえると，（1）から

$$\begin{aligned}\dot{x}^j + i\dot{y}^j = f^j(t, x^1, \cdots\cdots, x^n, y^1, \cdots\cdots, y^n)\\ + ig^j(t, x^1, \cdots\cdots, x^n, y^1, \cdots\cdots, y^n)\end{aligned} \tag{4}$$

がえられる．ただし f^j, g^j はつぎの関係をみたす実変数の実関数である：

$$f^j(t, x^1, \cdots\cdots, x^n, y^1, \cdots\cdots, y^n) + ig^j(t, x^1, \cdots\cdots, x^n, y^1, \cdots\cdots, y^n) = \\ = h^j(t, x^1 + iy^1, \cdots\cdots, x^n + iy^n).$$

（4）から次式がえられる．

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}^j = f^j(t, x^1, \cdots\cdots, x^n, y^1, \cdots\cdots, y^n), \qquad j=1, \cdots\cdots, n,\\ \dot{y}^j = g^j(t, x^1, \cdots\cdots, x^n, y^1, \cdots\cdots, y^n), \qquad j=1, \cdots\cdots, n.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

このようにして，正規形の複素微分方程式系（1）は正規形の実微分方程式系（5）に変換される．方程式（1）の右辺は $z^1, \cdots\cdots, z^n$ の多項式であるから，方程式（5）の右辺は $x^1, \cdots\cdots, x^n, y^1, \cdots\cdots, y^n$ の多項式である．多項式 h^j の係数は区間 $q_1 < t < q_2$ で連続な t の関数であるから，多項式 f^j および g^j の係数もまた同じ区間で連続な t の関数である．ゆえに系（5）の右辺は，t がただ1つの条件 $q_1 < t < q_2$ をみたし他の変数 $x^1, \cdots\cdots, x^n, y^1, \cdots\cdots, y^n$ は任意であるような点 $(t, x^1, \cdots\cdots, x^n, y^1, \cdots\cdots, y^n)$ 全体からつくられる開集合 Γ において定理2の条件をみたす．けっきょく，方程式系（1）を与えられた初期条件のもとで解くことは，

$$z_0^j = x_0^j + iy_0^j, \qquad j=1, \cdots\cdots, n,$$
$$\chi^j(t) = \varphi^j(t) + i\psi^j(t), \qquad j=1, \cdots\cdots, n.$$

とおくことによって，初期条件

$$\varphi^j(t_0) = x_0^j, \qquad j=1, \cdots\cdots, n,$$
$$\psi^j(t_0) = y_0^j, \qquad j=1, \cdots\cdots, n,$$

をみたす系（5）の解を求めることに帰着する．定理2によってこのような解はたしかに存在し，かつ同一の初期値をもついかなる2つの解もそれらの定義区間の共通部分において一致する．

系（1）が線形ならば，系（5）も線形であるから，B］の最後の部分は定理3からみちびかれる．

ここでとくに変数 $z^1, \cdots\cdots, z^n$ の多項式を右辺にもつ系（1）が実の場合，すなわち多項式の係数が変数 t の実関数である場合を考えてみよう．この場合にももちろん系（1）を複素微分方程式とみなすことができる．すなわち $z^1, \cdots\cdots, z^n$ を複素関数と考えてその複素解を求めるのである．実方程式に対してこの方法がもちいられる理由は，実方程式の実解よりもその複素解を見出すほうが容易な場合があるからである．この場合には，はじめに実方程式系の複素解を見つけ，つぎに複素解の中から実解すなわち虚部が0であるような複素解だけをえらび出すのである．あとでこのような方法による定係数の線形方程式の解法を述べる．

実方程式の場合と同様に，複素微分方程式の場合にも，かなり一般な微分方程式系を正規形にすることができる．したがって，複素微分方程式の場合にも§4 の **A**], **B**] と同じような結果がえられる．つぎに単独の n 階方程式に対する存在定理を述べておこう．

C] n 階の方程式

$$z^{(n)}=f(t, z, \dot{z}, \cdots\cdots, z^{(n-1)}) \tag{6}$$

の右辺は，区間 $q_1<t<q_2$ で定義された変数 t の実または複素連続関数を係数とする変数 $z, \dot{z}, \cdots\cdots, z^{(n-1)}$ の多項式とする．いまもし $t_0, z_0, \dot{z}_0, \cdots\cdots, z_0^{(n-1)}$ を任意の初期値（$z_0, \dot{z}_0, \cdots\cdots, z_0^{(n-1)}$ は任意の複素数）とし，t_0 は不等式 $q_1<t_0<q_2$ をみたす実数とすれば，方程式（6）の解 $z=\varphi(t)$ で初期条件

$$\varphi(t_0)=z_0,\ \dot{\varphi}(t_0)=\dot{z}_0, \cdots\cdots, \varphi^{(n-1)}(t_0)=z_0^{(n-1)}$$

をみたすものが存在する．また同一の初期条件をもついかなる2つの解もそれらの定義区間の共通部分において一致する．方程式（6）が線形すなわち多項式 f が $z, \dot{z}, \cdots\cdots, z^{(n-1)}$ の1次式である場合には，任意の初期値に対して区間 $q_1<t<q_2$ 全体で定義された解が存在する．

§7 では，またそれ以後においても，実変数 t の複素関数 $e^{\lambda t}$（λ は複素数）が重要な役割をはたす．つぎにこの関数の定義を与え，かつそのいくつかの性質を証明しよう．

D] $w=u+iv$ を任意の複素数とし，

$$e^w=e^u(\cos v+i\sin v) \tag{7}$$

と定義する．容易にわかるように，つぎの関係がある：

$$\overline{e^w}=e^{\overline{w}}.$$

あとで公式

$$e^{w_1}e^{w_2}=e^{w_1+w_2} \tag{8}$$

を証明する．（7）からただちに，つぎのよく知られた**オイラー**（Euler）の公式が出てくる．

$$\cos v=\frac{e^{iv}+e^{-iv}}{2}, \qquad \sin v=\frac{e^{iv}-e^{-iv}}{2i}.$$

複素数 $\lambda=\mu+i\nu$ に対して，公式（7）によって

$$e^{\lambda t}=e^{\mu t}(\cos\nu t+i\sin\nu t)$$

がえられる．

ここで複素数 λ に対してつぎの微分公式が成り立つことをしめそう：

$$\frac{d}{dt}e^{\lambda t}=\lambda e^{\lambda t}. \tag{9}$$

λ が実数の場合にはこの公式はよく知られている．

ここでは複素変数 w の関数 e^w を公式（7）によって定義したが，関数 e^w を級数

$$e^w=1+w+\frac{w^2}{2!}+\frac{w^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{w^n}{n!}+\cdots\cdots$$

によって定義することもできる．そしてこの定義から逆に（7）が証明される．しかし，ここでは関数 e^w は公式（7）によって定義されていると考えよう．

さて，

$$w_1=u_1+iv_1,\qquad w_2=u_2+iv_2$$

とすれば，

$$e^{w_1}e^{w_2}=e^{u_1}(\cos v_1+i\sin v_1)e^{u_2}(\cos v_2+i\sin v_2)$$

$$=e^{u_1+u_2}(\cos(v_1+v_2)+i\sin(v_1+v_2))=e^{w_1+w_2}$$

となる．これで公式（8）が証明された．

つぎに公式（9）を証明しよう．はじめに純虚数 $\lambda=i\nu$ の場合を考える．

$$\frac{d}{dt}e^{i\nu t}=\frac{d}{dt}(\cos\nu t+i\sin\nu t)=-\nu\sin\nu t+i\nu\cos\nu t$$

$$=i\nu(\cos\nu t+i\sin\nu t)=i\nu e^{i\nu t}.$$

また任意の $\lambda=\mu+i\nu$ に対しては，積の微分の公式によって

$$\frac{d}{dt}e^{\lambda t}=\frac{d}{dt}(e^{\mu t}\cdot e^{i\nu t})=\left(\frac{d}{dt}e^{\mu t}\right)e^{i\nu t}+e^{\mu t}\left(\frac{d}{dt}e^{i\nu t}\right)$$

$$=\mu e^{\mu t}e^{i\nu t}+i\nu e^{\mu t}e^{i\nu t}=(\mu+i\nu)e^{\mu t+i\nu t}=\lambda e^{\lambda t}.$$

例

1. 複素微分方程式

$$\dot{z}=\lambda z \tag{10}$$

を考察しよう．ここで $z=x+iy$ は実変数 t の未知関数，$\lambda=\mu+i\nu$ は複素数とする．(9) によって

$$z=ce^{\lambda t} \quad (c\text{は任意の複素数}) \tag{11}$$

は方程式 (10) の解であることがわかる．公式 (11) はすべての解をあらわしていることをしめそう．それには §1 の例1と同様に一意性の定理を利用できるが，ここでは定理3をもちいることによってある程度計算を簡略化しうることをしめしたい．いまの場合にはこれらの簡略化はほとんど目立たないものであるが，あとでしめすように，同様な方法がもっと本質的な結果をもたらすのである．さて，$z=\chi(t)$ を方程式 (10) の任意の解とする．定理3によって（B］の最後の部分を見よ)，この解はすべての t に対して定義されていると考えてよい．$\chi(0)=z_0$ とおけば，解 $z=\chi(t)$ は初期値 0, z_0 をもつ．(11) において $c=z_0$ としたときの解

$$z=z_0e^{\lambda t}$$

も同じ初期値をもつから $\chi(t)=z_0e^{\lambda t}$ となる．

$c=re^{i\alpha}$ ($r\geqq 0$ かつ α は実数) とおけば，解 (11) は

$$z=re^{\lambda t+i\alpha} \tag{12}$$

の形に書ける．

方程式 (10) を実部と虚部とに分解すると，

$$\dot{x}+i\dot{y}=(\mu+i\nu)(x+iy)=(\mu x-\nu y)+i(\nu x+\mu y)$$

となるから，

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=\mu x-\nu y,\\ \dot{y}&=\nu x+\mu y,\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

がえられる．このように，2つの実方程式からなる系 (13) は1つの複素方程式 (10) に同値であり，それゆえ系 (13) の任意の解 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ は方程式 (10) の任意の解 (12) とつぎの関係

$$\varphi(t)+i\psi(t)=re^{\lambda t+i\alpha}=re^{\mu t}(\cos(\nu t+\alpha)+i\sin(\nu t+\alpha))$$

によって結ばれている．これより

$$\left.\begin{aligned}x&=\varphi(t)=re^{\mu t}\cos(\nu t+\alpha),\\ y&=\psi(t)=re^{\mu t}\sin(\nu t+\alpha),\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

がえられる．このように，複素関数と複素方程式を利用することによって，実方程式系 (13) の解 (14) が求まった．

2. 複素微分方程式を2つの実微分方程式に分解するもう1つの例を与えよう．

$$\dot{z}=z^2+iz$$

を複素方程式とする．ここに $z=x+iy$ は実変数 t の未知関数である．

$$\dot{x}+i\dot{y}=(x+iy)^2+i(x+iy)=(x^2-y^2-y)+i(2xy+x)$$

であるから，

$$\begin{cases}\dot{x}=x^2-y^2-y,\\ \dot{y}=2xy+x.\end{cases}$$

§6. 線形微分方程式に関するいくつかの命題

微分方程式系が**線形**であるとは，この系の方程式がすべての未知関数とそれらの導関数とに関して1次式になっている場合をいう．したがって，いちばん一般的な線形方程式系はつぎの形に書かれる：

$$\sum_{j,k} a_{ijk}(t)(x^j)^{(k)}+b_i(t)=0, \qquad i=1,\cdots\cdots,n. \tag{1}$$

ここで $x^1,\cdots\cdots,x^n$ は独立変数 t の未知関数，方程式の係数 $a_{ijk}(t)$ および自由項 $b_i(t)$ は t の関数である．系（1）の自由項がすべて恒等的に0に等しい場合には，この系は**同次**であるといわれる．それぞれの線形系には，その自由項を捨てさってえられる同次な線形系が対応する．したがって線形系（1）には，同次な線形系

$$\sum_{j,k} a_{ijk}(t)(y^j)^{(k)}=0, \qquad i=1,\cdots\cdots,n, \tag{2}$$

が対応する．

簡単に証明される線形系のいくつかの性質を述べよう．この場合，線形系の係数および自由項はすべて区間 $q_1<t<q_2$ で定義され，かつ連続であると仮定する．

A］ $y^i=\varphi^i(t)$, $y^i=\psi^i(t)$ $(i=1,\cdots\cdots,n)$ を同次な線形系（2）の2つの解，c_1, c_2 を任意の数とすれば，関数系

$$y^i=c_1\varphi^i(t)+c_2\psi^i(t), \qquad i=1,\cdots\cdots,n,$$

もまた同次系（2）の解である．同様なことが同次系（2）の3つまたはそれ以上の個数の解に対してもいえる．

B］ $x^i=\psi^i(t)$, $x^i=\chi^i(t)$ $(i=1,\cdots\cdots,n)$ を線形系（1）の2つの解とすれば，関数の系

$$y^i=\psi^i(t)-\chi^i(t), \qquad i=1,\cdots\cdots,n,$$

は同次系（2）の解である．また $y^i=\varphi^i(t)$ $(i=1,\cdots\cdots,n)$ を同次系（2）の解，$x^i=\psi^i(t)$ $(i=1,\cdots\cdots,n)$ を線形系（1）の解とすれば，関数の系

$$x^i=\varphi^i(t)+\psi^i(t), \qquad i=1,\cdots\cdots,n,$$

は線形系（1）の解である．

C］ 線形系（1）の自由項がつぎのような和の形にあらわされているものとしよう：

$$b_i(t)=\alpha c_i(t)+\beta d_i(t), \qquad i=1,\cdots\cdots,n, \quad (\alpha,\beta \text{ は定数}).$$

系（1）とともにつぎのような2つの方程式系を考える：

$$\sum_{j,k} a_{ijk}(t)(x^j)^{(k)}+c_i(t)=0, \qquad i=1,\cdots\cdots,n, \tag{3}$$

$$\sum_{j,k} a_{ijk}(t)(x^j)^{(k)}+d_i(t)=0, \qquad i=1,\cdots\cdots,n. \tag{4}$$

$x^i=\psi^i(t)$ $(i=1,\cdots\cdots,n)$ を系（3）の解，$x^i=\chi^i(t)$ $(i=1,\cdots\cdots,n)$ を系（4）の解とすれば，関数の系

$$x^i=\alpha\psi^i(t)+\beta\chi^i(t), \qquad i=1,\cdots\cdots,n,$$

は系（1）の解である．

第 2 章

定係数の線形方程式

常微分方程式系の中でも定係数の線形方程式系は，初等関数だけをもちいて解ける点で非常に重要なものである．これらの方程式を解くには原理的なむずかしさがないため，理論的にはあまり興味がないものと考えられがちであり，ふつう教科書では線形方程式の一般論の単なる例として扱われているにすぎない．しかし，工学的対象の多くはそのはたらきが適当な方法で定係数の線形方程式によって十分に記述されるため，これらの方程式には広範な工学的応用がある．むしろ工学的応用が，定係数線形方程式の理論に理論的性格の一連のあたらしい問題を提供しているといってもよい．これらの理論的な問題を解決するため，実用的な傾向のある多くの研究がなされているが，それらのうちのいくつかをこの章で取り上げてみた．たとえば工学で常用されている演算子記号を本章でももちいるが，これは方程式系を消去法によって解く場合に非常に有用である．また自動制御論できわめて重要な線形方程式系の解の安定性の問題を考察する．ついで，いわゆる複素振幅の方法を述べる．これは定常な特殊解を見つけ出す便利な方法であって，電気工学で広く使われている．

また，この章では応用上あらわれる純然たる数学的問題を解くだけでなく，ごく簡略で天下り的な形ではあるが電気回路の理論をも述べる．電気回路の計算は，この章で展開される数学的方法の工学への応用例としてもすぐれ，かつ重要なものである．

そのほか，この章では 2 階線形方程式系の相平面を考察する．これは（一般に非線形な）自律系の相空間の研究への入門となる．自律系の相空間もやはり工学に応用される重要なものである．

以上の理由から，定係数線形方程式に関するこの第 2 章は，一般の常微分方

程式の教科書に見られるよりもはるかに多くの紙数をしめている．この章の内容は行列のジョルダン（Jordan）標準形を使う §14 をのぞき，すべてきわめて初等的である．ジョルダン標準形を必要とする事項はどれもあとで使われることはないから，その部分はとばして読んでもさしつかえない．くわしいことは §14 に説明してある．

§7. 定係数の線形同次方程式（単根の場合）

この§とつぎの§では，定係数の n 階線形同次方程式

$$z^{(n)}+a_1z^{(n-1)}+\cdots\cdots+a_{n-1}\dot{z}+a_nz=0 \tag{1}$$

を解くことにする．ここに z は独立変数 t の未知関数，係数 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ は（実または複素）定数である．

はじめに，この方程式のすべての複素解を求め，つぎに（係数 $a_1, \cdots, a_n$ が実数の場合には）それらの中から実解をえらび出そう．

方程式（1）はつぎの形に書ける：

$$z^{(n)}=-a_1z^{(n-1)}-\cdots\cdots-a_{n-1}\dot{z}-a_nz. \tag{2}$$

したがって，これに対して存在と一意性の定理（§5 の C］を見よ）が適用される．しかし方程式（2）の解は具体的に求まるので，解の存在は明らかであり，以後一意性の定理だけが利用される．この一意性の定理は，（2）のすべての解が求まったことを証明する際に使われる．

工学で定係数の常微分方程式を扱う場合には，演算子法が重要な役割をはたしている．これからは演算子法の基礎である**記号的**（または**作用素的**）**記法**を使用する．記号的記法とは，つまり，任意の関数 $z=z(t)$ の t に関する導関数を $\dfrac{d}{dt}z$ であらわすかわりに，pz であらわそうというのである．したがって関数記号の左側にある文字 p は，t に関する微分の記号である．もし微分の記号 p にいくつかの代数的演算の適用をみとめれば，

$$\frac{d^k}{dt^k}z=p^kz$$

というあらわしかたができる．この記号をもちいれば，

$$a_0z^{(n)}+a_1z^{(n-1)}+\cdots\cdots+a_{n-1}\dot{z}+a_nz=a_0p^nz+a_1p^{n-1}z+\cdots\cdots+a_{n-1}pz+a_nz$$

と書くことができる．

いまもしこの等式の右辺において，関数 z を括弧の外にくくり出せると考えれば，等式

$$a_0z^{(n)}+a_1z^{(n-1)}+\cdots\cdots+a_{n-1}\dot{z}+a_nz$$
$$=(a_0p^n+a_1p^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}p+a_n)z$$

がえられる．こうして，つぎの定義に達する．

A］ $$L(p)=a_0p^n+a_1p^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}p+a_n$$

を記号 p に関する定係数（実または複素数）の任意の多項式とする．実変数 t の（実または複素）関数 z に対して，

$$L(p)z=a_0z^{(n)}+a_1z^{(n-1)}+\cdots\cdots+a_{n-1}\dot{z}+a_nz \qquad (3)$$

と定義する．いま $L(p)$, $M(p)$ を記号 p（いわゆる微分演算子）に関する 2 つの多項式とし，z, z_1, z_2 を変数 t の関数とすれば，容易にわかるようにつぎの恒等式が成り立つ：

$$L(p)(z_1+z_2)=L(p)z_1+L(p)z_2,$$
$$(L(p)+M(p))z=L(p)z+M(p)z,$$
$$(L(p)M(p))z=L(p)(M(p)z).$$

いま導入した記号をもちいれば，方程式（1）はつぎの形に書ける：

$$L(p)z=0, \qquad (4)$$

ただし $L(p)=p^n+a_1p^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}p+a_n$ である．

B］ $L(p)$ を記号 p に関する任意の多項式とする．この場合，つぎの公式が成り立つ．

$$L(p)e^{\lambda t}=L(\lambda)e^{\lambda t} \qquad (5)$$

公式（5）を証明しよう．

$$pe^{\lambda t}=\lambda e^{\lambda t}$$

であるから（§5 の公式（9）を見よ），これより $p^ke^{\lambda t}=\lambda^ke^{\lambda t}$ が出てくる．これからただちに公式（5）がえられる（(3) を見よ）．

公式（5）によって，関数 $e^{\lambda t}$ が方程式（4）の解となるのは，λ が多項式

$L(p)$ の根*)の場合であり，かつこの場合にかぎることがわかる．多項式 $L(p)$ は方程式（4）の**特性多項式**とよばれる．これが重根をもたない場合には，方程式（4）のすべての解はつぎの定理によってえられる．

定理 4. 『方程式

$$L(p)z=0 \tag{6}$$

の特性多項式 $L(p)$ が重根をもたないものと仮定し，その根を

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_n$$

とする（（1）と（4）とを見よ）．

$$z_1=e^{\lambda_1 t},\ z_2=e^{\lambda_2 t}, \cdots\cdots, z_n=e^{\lambda_n t} \tag{7}$$

とおけば，任意の複素定数 $c^1, c^2, \cdots\cdots, c^n$ に対して，関数

$$z=c^1 z_1+c^2 z_2+\cdots\cdots+c^n z_n \tag{8}$$

は方程式（6）の解である．また方程式（6）の任意の解は適当に定数 $c^1, c^2, \cdots\cdots, c^n$ をえらべば（8）の形に書ける，という意味において（8）は**一般解**である．なお定数 $c^1, c^2, \cdots\cdots, c^n$（積分定数とよばれる）は与えられた解 z に対して一意的にきまる』

関数（7）は数直線 $-\infty<t<+\infty$ 全体で定義されていることを注意しておく．

証明　公式（5）から，系（7）の各関数は方程式（6）の解であることがわかり，また方程式（6）が線形かつ同次なことから，任意の複素定数 $c^1, c^2, \cdots\cdots, c^n$ に対して（8）は方程式（6）の解であることがわかる（§6 の A］を見よ）．つぎに $z_*=z_*(t)$ が方程式（6）の解であれば，それは（8）の形に書かれることをしめそう．§5 の C］によって，解 z_* は直線 $-\infty<t<+\infty$ 全体で定義されていると考えてよい．

$$z_*(0)=z_0,\ \dot{z}_*(0)=\dot{z}_0, \cdots\cdots, z_*^{(n-1)}(0)=z_0^{(n-1)}$$

とおく．このとき定数 $c^1, c^2, \cdots\cdots, c^n$ を適当にえらべば，（8）式によって与えられる解 $z(t)$ もやはり，同じ初期条件

$$z(0)=z_0,\ \dot{z}(0)=\dot{z}_0, \cdots\cdots, z^{(n-1)}(0)=z_0^{(n-1)} \tag{9}$$

*）訳注：原著の用語に従って，方程式 $f(p)=0$ の根を単に $f(p)$ の根という．

をみたすことをしめそう．（8）式の関数 z を方程式（9）に代入すると，つぎの関係がえられる：

$$c^1 z_1^{(s)}(0)+\cdots\cdots+c^n z_n^{(s)}(0)=z_0^{(s)}, \qquad s=0,1,\cdots\cdots,n-1. \tag{10}$$

(10) は未知数 $c^1,\cdots\cdots,c^n$ に関する連立1次方程式である．この連立方程式が解けるためには，行列

$$\begin{pmatrix} z_1(0) & z_2(0) & \cdots\cdots\cdots\cdots & z_n(0) \\ \dot{z}_1(0) & \dot{z}_2(0) & \cdots\cdots\cdots\cdots & \dot{z}_n(0) \\ \ddot{z}_1(0) & \ddot{z}_2(0) & \cdots\cdots\cdots\cdots & \ddot{z}_n(0) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ z_1^{(n-2)}(0) & z_2^{(n-2)}(0) & \cdots\cdots & z_n^{(n-2)}(0) \\ z_1^{(n-1)}(0) & z_2^{(n-1)}(0) & \cdots\cdots & z_n^{(n-1)}(0) \end{pmatrix} \tag{11}$$

の行列式が0でなければよい．すぐにわかるように，行列（11）は

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots\cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots\cdots & \lambda_n^2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots\cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

になる．$\lambda_1,\lambda_2,\cdots\cdots,\lambda_n$ はみな互いに異なるから，この行列の行列式（Vandermonde の行列式）は0ではない．しかしここでは，行列（11）の行列式が0でないことのもっと直接的な別証明を与えよう．この証明法はあとで重根の場合にも適用される．

もし行列（11）の行列式が0になったとすると，その行のあいだに1次従属な関係があるはずである．すなわち，同時には0でないような数 $b_{n-1}, b_{n-2}, \cdots\cdots, b_0$ が存在して，これらをそれぞれ行列（11）の行にかけたうえで加え合わせると 0-行[*] がえられる．この 0-行の k 番目の成分を書き抜くと，つぎのようになる：

---

[*] 訳注：成分が全部0からなる行のこと（零ベクトル）．

$$b_{n-1}z_k(0)+b_{n-2}\dot{z}_k(0)+\cdots\cdots+b_1z_k^{(n-2)}(0)+b_0z_k^{(n-1)}(0)=0. \qquad (12)$$

多項式 $b_0p^{n-1}+b_1p^{n-2}+\cdots\cdots+b_{n-2}p+b_{n-1}$ を $M(p)$ であらわせば，関係式 (12) はつぎの形に書くことができる：

$$M(p)z_k|_{t=0}=0.$$

公式（5）と（7）とによって，これより

$$M(\lambda_k)=0 \qquad (k=1,\cdots\cdots,n)$$

がえられるが，これは不合理である．なぜなら，多項式 $M(p)$ の次数は $n-1$ を越えないため，n 個の互いに異なる根をもつことはできないからである．これで，連立方程式 (10) の行列式は0でないことがわかった．ゆえに，解 $z_*(t)$ と $z(t)$ とが同一の初期条件をみたすように定数 $c^1,\cdots\cdots,c^n$ をえらぶことが（しかも一意的に）できる．これらの定数をこのようにえらんだとき（しかもそのときにかぎって），解（8）は与えられた解 $z_*(t)$ に一致する．これで定理4が証明された．

方程式（6）に含まれる多項式 $L(p)$ の係数が実数の場合には，複素解（8）全体の中から実解をえらび出す問題がおこる．

この問題の解答は E］で与えられるが，その記述と証明にはベクトルの記法が使用されるので，ここでそれらを復習しておこう．

C］ n 次元空間の**ベクトル**とは，n 個の数からなる系列

$$\boldsymbol{u}=(u^1, u^2, \cdots\cdots, u^n)$$

のことである．$u^1, u^2, \cdots\cdots, u^n$ はベクトル $\boldsymbol{u}$ の**成分**といわれる．ベクトルはいつでも太文字であらわすことにする．もしベクトルの成分がみな実数であれば**実ベクトル**といい，またもしその成分が複素数であれば**複素ベクトル**という．ベクトル $\boldsymbol{u}$ に**複素共役**なベクトル $\overline{\boldsymbol{u}}$ は

$$\overline{\boldsymbol{u}}=(\overline{u^1}, \overline{u^2}, \cdots\cdots, \overline{u^n})$$

で定義される．明らかに，ベクトル $\boldsymbol{u}$ が実ベクトルであるのは

$$\overline{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{u}$$

の場合であり，かつこの場合にかぎる．ベクトル $\boldsymbol{u}=(u^1, u^2, \cdots\cdots, u^n)$ と実数または複素数 α との**積**は次式で定義される：

$$\alpha u = u\alpha = (\alpha u^1, \alpha u^2, \cdots\cdots, \alpha u^n).$$

ベクトル

$$u = (u^1, u^2, \cdots\cdots, u^n) \text{ と } v = (v^1, v^2, \cdots\cdots, v^n)$$

との和は次式で定義される：

$$u + v = (u^1 + v^1, u^2 + v^2, \cdots\cdots, u^n + v^n).$$

すべての成分が 0 であるようなベクトルを**零ベクトル**といい **0** であらわす．

有限個のベクトル

$$u_1,\ u_2, \cdots\cdots, u_r$$

が与えられたとする．もし

$$\alpha^1 u_1 + \alpha^2 u_2 + \cdots\cdots + \alpha^r u_r = 0$$

という関係があって，数 $\alpha^1, \cdots\cdots, \alpha^r$ の中に 0 でないものがあれば，ベクトル $u_1, u_2, \cdots\cdots, u_r$ は **1 次従属**であるという．ベクトルが一次従属でない場合に，それらは **1 次独立**であるという．

$$u_j = (u_j^1,\ u_j^2, \cdots\cdots, u_j^n), \qquad j = 1, \cdots\cdots, r,$$

のとき，u_j^i から行列 (u_j^i) $(i = 1, \cdots\cdots, n\,;\ j = 1, \cdots\cdots, r)$ がつくられる．上の添字 i は行の番号を，また下の添字は列の番号をあらわしていると考えれば，行列 (u_j^i) の高さは n で幅は r である．こうして，ベクトル u_j には，行列 (u_j^i) の（u_j と同じ成分からなる）j-番目の列が対応する．このことからわかるように，ベクトル $u_1, u_2, \cdots\cdots, u_r$ の 1 次従属な関係には，行列 (u_j^i) の列の 1 次従属な関係が対応する．$r = n$ の場合には行列 (u_j^i) は正方形であって，ベクトル $u_1, u_2, \cdots\cdots, u_n$ はこの行列の行列式 $|u_j^i|$ が 0 でないとき，かつそのときにかぎって 1 次独立である．

D］ n 次元空間における n 個の 1 次独立な複素ベクトルを

$$z_1, z_2, \cdots\cdots, z_n \tag{13}$$

とする．(13) は各ベクトルとともに，それに共役なベクトルをも含んでいるものと仮定する．このとき，ベクトル

$$z = c^1 z_1 + c^2 z_2 + \cdots\cdots + c^n z_n$$

が実ベクトルであるのは，互いに共役なベクトルの係数は互いに共役であり実

ベクトルの係数は実数である場合であり，かつこの場合にかぎる.

これを証明しよう．議論を明確にするため，

$$\left.\begin{aligned}&\bar{z}_1=z_2,\ \cdots\cdots,\ \bar{z}_{2k-1}=z_{2k},\\&\bar{z}_j=z_j\ ;\ j=2k+1,\ \cdots\cdots,\ n,\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

と仮定する．そうすれば，

$$z=c^1z_1+c^2z_2+\cdots\cdots+c^{2k-1}z_{2k-1}+c^{2k}z_{2k}+c^{2k+1}z_{2k+1}+\cdots\cdots+c^nz_n\tag{15}$$

であるから，ベクトル $\bar{z}$ は (14) によってつぎのようになる：

$$\bar{z}=\overline{c^2}z_1+\overline{c^1}z_2+\cdots\cdots+\overline{c^{2k}}z_{2k-1}+\overline{c^{2k-1}}z_{2k}+\overline{c^{2k+1}}z_{2k+1}+\cdots\cdots+\overline{c^n}z_n.\tag{16}$$

もし

$$c^1=\overline{c^2},\ \cdots\cdots,\ c^{2k-1}=\overline{c^{2k}},\ c^{2k+1}=\overline{c^{2k+1}},\ \cdots\cdots,\ c^n=\overline{c^n}\tag{17}$$

であれば，等式 (15) と (16) とから $\bar{z}=z$ となる．すなわち z は実ベクトルである．逆に，ベクトル z が実ベクトルすなわち $\bar{z}=z$ と仮定すれば，等式 (15) と (16) とから（ベクトル (13) の1次独立性によって）関係 (17) がえられる．これで証明がおわった.

つぎの **E**] では，多項式 $L(p)$ の係数が実数である場合に，方程式 (6) のすべての複素解の中から実解をえらび出す方法を説明する.

E] 多項式 $L(p)$ の係数は実数であるとしよう．この場合，多項式 $L(p)$ はその複素根 λ とともに，それに共役な根 $\bar{\lambda}$ をもつ．方程式 (6) の解 $e^{\lambda t}$ と $e^{\bar{\lambda}t}$ とは互に共役である（§5 の **D**] を見よ）．もし根 λ が実数であれば，解 $e^{\lambda t}$ は実解である．このように，解の系 (7) の中にはおのおのの解とともに，それに複素共役な解も含まれている．方程式 (6) の解 (8) が実解であるためには，互いに複素共役な解の係数は互いに共役であり，実解の係数は実数であることが必要かつ十分である.

証明のため，ベクトル $(z_k(0), \dot{z}_k(0), \cdots\cdots, z_k^{(n-2)}(0), z_k^{(n-1)}(0))$ を z_k で，ベクトル $(z_0, \dot{z}_0, \cdots\cdots, z_0^{(n-1)})$ を z であらわそう．このとき，関係式 (10) はつぎの形になる：

$$c^1z_1+c^2z_2+\cdots\cdots+c^nz_n=z.$$

行列 (11) の行列式は0でないから，ベクトル $z_1, z_2, \cdots\cdots, z_n$ は1次独立であ

る．したがって，条件の必要性は D］からただちにえられる．逆に，もしこの条件がみたされていれば，解（8）は実解である．実際，λ_1 と λ_2 とが互いに複素共役な2つの根であって，c^1 と c^2 とは互いに複素共役な2つの定数だとすれば，関数 $c_1e^{\lambda_1 t}$ と $c^2e^{\lambda_2 t}$ とは互いに複素共役であり，したがってそれらの和は実である．ゆえに E］が証明された．

例

1. 方程式

$$\dddot{z}-3\ddot{z}+9\dot{z}+13z=0$$

のすべての複素解を求めてみよう．

$$L(p)=p^3-3p^2+9p+13$$

とおけば，方程式は（6）の形に書くことができる．$p=-1$ は特性多項式 $L(p)$ の根であることがすぐにわかる．$L(p)$ を $p+1$ で割って

$$L(p)=(p+1)(p^2-4p+13)$$

がえられ，これよりさらに2つの根 $2\pm 3i$ が見つかる．結局，多項式 $L(p)$ の根は

$$\lambda_1=2+3i,\quad \lambda_2=2-3i,\quad \lambda_3=-1$$

である．定理4によって，いま考えている方程式の複素一般解はつぎのようになる：

$$z=c^1e^{(2+3i)t}+c^2e^{(2-3i)t}+c^3e^{-t}.$$

つぎの例2と例3では，実解をえらび出す2つの一般的な方法を述べる．これらの方法は E］からただちにえられる．

2. 基本系（7）が条件

$$\bar{z}_1=z_2,\ \cdots\cdots,\ \bar{z}_{2k-1}=z_{2k},\quad \bar{z}_{2k+1}=z_{2k+1},\ \cdots\cdots,\ \bar{z}_n=z_n \tag{18}$$

をみたしていると仮定し，

$$z_1=x_1+iy_1,\quad z_3=x_2+iy_2,\ \cdots\cdots,\ z_{2k-1}=x_k+iy_k$$

とおく．ただし $x_1, \cdots\cdots, x_k,\ y_1, \cdots\cdots, y_k$ は実関数である．さらに $c^1, c^2, \cdots\cdots, c^n$ は条件 (17) をみたすものとし，

$$c^1=\frac{1}{2}(a^1-ib^1),\ \cdots\cdots,\ c^{2k-1}=\frac{1}{2}(a^k-ib^k)$$

とおく．ただし $a^1, \cdots\cdots, a^k, b^1, \cdots\cdots, b^k$ は実数である．このとき，方程式（6）の実一般解はつぎの形に書きあらわされる：

$$z=a^1x_1+b^1y_1+\cdots\cdots+a^kx_k+b^ky_k+c^{2k+1}z_{2k+1}+\cdots\cdots+c^nz_n.$$

ここに $a^1, b^1, \cdots\cdots, a^k, b^k, c^{2k+1}, \cdots\cdots, c^n$ は任意の実数である．

3. ふたたび，解（7）は条件 (18) をみたしていると仮定し，

$$\lambda_1=\mu_1+i\nu_1,\ \cdots\cdots,\ \lambda_{2k-1}=\mu_k+i\nu_k$$

とおく．また $c^1, c^2, \cdots\cdots, c^n$ は条件 (17) をみたすものと仮定して，

$$c^1=\frac{1}{2}\rho_1 e^{i\alpha_1}, \cdots\cdots, c^{2k-1}=\frac{1}{2}\rho_k e^{i\alpha_k}$$

とおく．このとき，実解 z はつぎの形に書きあらわされる：

$$z=\rho_1 e^{\mu_1 t}\cos(\nu_1 t+\alpha_1)+\cdots\cdots+\rho_k e^{\mu_k t}\cos(\nu_k t+\alpha_k)$$
$$+c^{2k+1}e^{\lambda_{2k+1}t}+\cdots+c^n e^{\lambda_n t}.$$

ここに $\rho_1, \cdots\cdots, \rho_k, \alpha_1, \cdots\cdots, \alpha_k, c^{2k+1}, \cdots\cdots, c^n$ は任意の実定数である．この式からわかるように，根 λ_j の虚部 $\nu_j \neq 0$ は解に振動数 ν_j の振動的性格を与え，また根 λ_j の実部 μ_j は解に増大性（$\mu_j>0$ のとき）または減少性（$\mu_j<0$ のとき）を与える．

4. 例2と例3の結果を利用すれば，例1で考察した方程式のすべての実解はつぎのふたとおりの形に書きあらわすことができる：

$$z=a^1 e^{2t}\cos 3t+b^1 e^{2t}\sin 3t+c^3 e^{-t},$$
$$z=\rho_1 e^{2t}\cos(3t+\alpha_1)+c^3 e^{-t}.$$

§8. 定係数の線形同次方程式（重根の場合）

方程式

$$L(p)z=0 \tag{1}$$

の特性多項式 $L(p)=p^n+a_1 p^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}p+a_n$（§7 の **A**］を見よ）が重根をもつ場合には，$e^{\lambda t}$ という形では（1）の n 個の異なる解を見つけることはできない．この場合，別の形の解を見つけ出すため，つぎの示唆的な考え方ができよう．λ_1 と λ_2 とを特性多項式 $L(p)$ の 2 つの異なる実根とすると，関数 $\dfrac{e^{\lambda_1 t}-e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1-\lambda_2}$ は方程式（1）の解である．いま，多項式 $L(p)$ の係数を変化させていくときに λ_2 が λ_1 に収束するものと仮定すれば，この解は（極限において）関数 $te^{\lambda_1 t}$ になる．これを，λ_1 が多項式 $L(p)$ の 2 重根の場合の方程式（1）の解であると予想するのは自然であろう．同様に，λ が特性多項式 $L(p)$ の k 重根であれば，つぎの各関数

$$e^{\lambda t},\ te^{\lambda t}, \cdots\cdots, t^{k-1}e^{\lambda t}$$

はいずれも方程式（1）の解であろうということが予想される．この予想を複素重根の場合にもおしひろげれば，つぎの定理（定理 4 の一般化になっている）の正当性が推測される．

定理 5. 『

$$L(p)z=0 \tag{2}$$

を定係数の n 階線形同次方程式とする．また $\lambda_1, \cdots\cdots, \lambda_m$ を方程式（2）の特

性多項式 $L(p)$ の互いに異なる根の全部とし，根 λ_j の重複度を k_j とする．したがって $k_1+k_2+\cdots\cdots+k_m=n$.

$$\left.\begin{array}{l} z_1=e^{\lambda_1 t},\ z_2=te^{\lambda_1 t},\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\ z_{k_1}=t^{k_1-1}e^{\lambda_1 t};\\ z_{k_1+1}=e^{\lambda_2 t},\ z_{k_1+2}=te^{\lambda_2 t},\ \cdots\cdots\cdots,\ z_{k_1+k_2}=t^{k_2-1}e^{\lambda_2 t};\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\ z_n=t^{k_m-1}e^{\lambda_m t} \end{array}\right\} \quad (3)$$

とおく．このとき（3）の各関数はすべて方程式（2）の解である．ゆえに任意の複素定数 $c^1, c^2, \cdots\cdots, c^n$ に対して，関数

$$z=c^1z_1+\cdots\cdots+c^nz_n \quad (4)$$

もやはりこの方程式の解となる．方程式（2）の任意の解は適当に定数 $c^1, c^2, \cdots\cdots, c^n$ をえらべば（4）の形に書ける，という意味で（4）は一般解である なお定数 $c^1, c^2, \cdots\cdots, c^n$ は与えられた解 z に対して一意的にきまる』

関数（3）は数直線 $-\infty<t<+\infty$ 全体で定義されていることを注意しておく．

定理5を証明するまえに，つぎの公式（5）を証明する．

A］ $L(p)$ を任意の多項式，λ を任意の複素数，$f(t)$ を十分な回数微分可能な任意の関数とする．このとき，つぎの重要な公式が成り立つ：

$$L(p)(e^{\lambda t}f(t))=e^{\lambda t}\cdot L(p+\lambda)f(t). \quad (5)$$

公式（5）を証明しよう．まず $L(p)\equiv p$ の場合には，たしかに

$$p(e^{\lambda t}f(t))=\lambda e^{\lambda t}f(t)+e^{\lambda t}\dot{f}(t)=e^{\lambda t}(p+\lambda)f(t)$$

となる．つぎに任意の1次多項式 $L(p)=ap+b$ に対しても公式（5）が容易に証明される．すなわち

$$\begin{aligned}(ap+b)(e^{\lambda t}f(t))&=ap(e^{\lambda t}f(t))+be^{\lambda t}f(t)=ae^{\lambda t}(p+\lambda)f(t)+be^{\lambda t}f(t)\\ &=e^{\lambda t}[a(p+\lambda)+b]f(t).\end{aligned}$$

一般の場合の公式（5）の証明は，多項式 $L(p)$ の次数 n に関する帰納法による．$n=1$ の場合に公式が成り立つことはすでにたしかめた．（5）が次数 $n-1\ (n\geqq 2)$ に対して正しいと仮定して，n 次の多項式 $L(p)$ に対しても正しい

ことを証明しよう．そのため，n 次の多項式 $L(p)$ を 2 つの式に因数分解する：$L(p)=L_1(p)\cdot L_2(p)$，ただし $L_1(p)$ は1次，$L_2(p)$ は $n-1$ 次とする．多項式 $L_1(p)$ と $L_2(p)$ のおのおのに対して公式（5）が成り立つから，次式がえられる（§7 の **A**］を見よ）：

$$L(p)(e^{\lambda t}f(t))=L_1(p)(L_2(p)(e^{\lambda t}f(t)))=L_1(p)(e^{\lambda t}L_2(p+\lambda)f(t))$$
$$=e^{\lambda t}L_1(p+\lambda)L_2(p+\lambda)f(t)=e^{\lambda t}L(p+\lambda)f(t).$$

これで公式（5）が証明された．

さて，つぎの **B**］を証明しよう．定理5は **B**］にほとんど含まれる．

B］　$L(p)$ は記号 p に関する任意の多項式，また $\omega_r(t)$ は次式で定義される実変数 t の関数とする：

$$\omega_r(t)=L(p)t^r e^{\lambda t}\qquad (\lambda \text{ は複素数}).$$

もし λ が多項式 $L(p)$ の k 重根であれば，関数 $\omega_0(t),\cdots\cdots,\omega_{k-1}(t)$ は恒等的に 0 に等しい．他方，もし関数 $\omega_0(t),\omega_1(t),\cdots\cdots,\omega_{k-1}(t)$ が少なくとも1つの値 $t=t_0$ に対して同時に 0 になれば，すなわち

$$\omega_0(t_0)=\omega_1(t_0)=\cdots\cdots=\omega_{k-1}(t_0)=0 \tag{6}$$

となるならば，λ は多項式 $L(p)$ の根でその重複度は k より小さくはない．

これを証明しよう．

公式（5）によって次式がえられる：

$$\omega_r(t)=e^{\lambda t}L(p+\lambda)t^r. \tag{7}$$

はじめに，λ を多項式 $L(p)$ の k 重根とする．すなわち

$$L(p)=M(p)(p-\lambda)^k.$$

この恒等式において p を $p+\lambda$ でおきかえれば

$$L(p+\lambda)=M(p+\lambda)p^k \tag{8}$$

となる．$r<k$ のときは $p^k t^r=0$ であるから，（7）と（8）とから次式がえられる：

$$\omega_r(t)=e^{\lambda t}M(p+\lambda)(p^k t^r)=0,\qquad r=0,\ 1,\cdots\cdots,k-1.$$

これで **B**］の前半が証明された．

こんどは関係式（6）が成り立っているとしよう．$L(p+\lambda)$ を p のベキに展

開すると

$$L(p+\lambda)=b_0+b_1p+\cdots\cdots+b_{n-1}p^{n-1}+b_np^n. \tag{9}$$

関係（7）と（9）とから

$$\omega_0(t_0)=e^{\lambda t_0}b_0$$

がえられ，（6）によって

$$b_0=0$$

となる．つぎに

$$b_0=b_1=\cdots\cdots=b_{r-1}=0, \qquad r\leqq k-1, \tag{10}$$

と仮定して，$b_r=0$ を証明する．（7），（9），(10) によって

$$\omega_r(t_0)=e^{\lambda t_0}r!b_r.$$

ゆえに（6）によって

$$b_r=0.$$

したがって $b_0=b_1=\cdots\cdots=b_{k-1}=0$ となって多項式 $L(p+\lambda)$ はつぎのようになる：

$$L(p+\lambda)=b_kp^k+\cdots\cdots+b_np^n=(b_k+\cdots\cdots+b_np^{n-k})p^k=M_1(p)p^k.$$

この恒等式において p を $p-\lambda$ でおきかえれば，

$$L(p)=M_1(p-\lambda)\cdot(p-\lambda)^k$$

がえられる．これは，λ が多項式 $L(p)$ の根でその重複度は k より小さくないことをしめしている．これで **B**] が証明された．

定理5の証明　**B**] の前半からすぐにわかるように，定理5で述べた（3）の各関数は方程式（2）の解である．方程式（2）の任意の解 z_* は，適当に定数 $c^1,\cdots\cdots,c^n$ をえらべば，（4）の形に書けることを証明しよう（この際，定理4の証明とちがい定理3を使用しない）．

z_* を区間 $r_1<t<r_2$ における方程式（2）の任意の解，t_0 をこの区間の1つの数として

$$z_*(t_0)=z_0,\ \dot{z}_*(t_0)=\dot{z}_0,\ \cdots\cdots,\ z_*^{(n-1)}(t_0)=z_0^{(n-1)}$$

とおく．さて，（4）によって与えられる方程式（2）の解 z が，与えられた解 z_* と同一の初期条件をみたすように定数 $c^1,\cdots\cdots,c^n$ を定めよう．そうす

れば，一意性の定理によって $z(t)=z_*(t)(r_1<t<r_2)$ となる．定数 $c^1, \cdots\cdots,$ c^n をきめるため，つぎの連立1次方程式がえられる：

$$c^1 z_1^{(s)}(t_0)+c^2 z_2^{(s)}(t_0)+\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots+c^n z_n^{(s)}(t_0)=z_0^{(s)}, \quad s=0,1,\cdots\cdots,n-1. \tag{11}$$

これが解けるためには，行列

$$\begin{pmatrix} z_1(t_0) & z_2(t_0) & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & z_n(t_0) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ z_1^{(s)}(t_0) & z_2^{(s)}(t_0) & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & z_n^{(s)}(t_0) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ z_1^{(n-1)}(t_0) & z_2^{(n-1)}(t_0) & \cdots\cdots\cdots\cdots & z_n^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} \tag{12}$$

の行列式が0でなければよい．これを証明するには，行列 (12) の行が1次独立であることをしめせばよい．仮りにそうでなかったとすると，同時には0でないような定数 $b_{n-1}, b_{n-2}, \cdots\cdots, b_0$ をえらんで，これらを順次に行列 (12) の第1行，第2行，……，第 n 行にかけて加え合わせるとき，その和が0になるようにすることができる．第 j 列の要素の和を書き出すと，等式

$$b_0 z_j^{(n-1)}(t_0)+b_1 z_j^{(n-2)}(t_0)+\cdots\cdots+b_{n-2}\dot{z}_j(t_0)+b_{n-1}z_j(t_0)=0$$

がえられ，これはつぎのように書きかえることができる：

$$M(p)z_j|_{t=t_0}=0, \tag{13}$$

ただし $M(p)=b_0p^{n-1}+b_1p^{n-2}+\cdots\cdots+b_{n-2}p+b_{n-1}$．$j=1,\cdots\cdots,k_1$ に対してえられる等式 (13) は，λ_1 が多項式 $M(p)$ の少なくとも k_1 重根であることをしめしている (B] を見よ)．まったく同様にして，$j=k_1+1,\cdots\cdots,k_1+k_2$ に対してえられる等式 (13) は，λ_2 が多項式 $M(p)$ の少なくとも k_2 重根であることをしめしている．ゆえに (13) の各等式 ($j=1,2,\cdots\cdots,n$) から多項式 $M(p)$ は (重複度もかぞえて) n 個以上の根をもつことがわかるが，$M(p)$ の次数は $n-1$ よりも大きくはないから，これは不合理である．けっきょく，行列 (12) の行列式が0に等しいと仮定すると矛盾がえられる．ゆえに連立1次方程式 (11) は未知数

$$c^1, c^2, \cdots\cdots, c^n$$

について解ける（しかも一意的に）．これで定理５は完全に証明された．

つぎに定理５の１つの自明な系を述べておく．

C〕 方程式（２）の任意の解 $z(t)$ はつぎの形に書くことができる：

$$z(t)=f_1(t)e^{\lambda_1 t}+f_2(t)e^{\lambda_2 t}+\cdots\cdots+f_m(t)e^{\lambda_m t},$$

ただし $f_j(t)$ は次数が k_j-1 （$j=1,\cdots\cdots,m$）を越えない多項式である．また多項式 $f_1(t),\cdots\cdots,f_m(t)$ は解 $z(t)$ によって一意的にきまる．なぜならそれらの係数は積分定数 $c^1,c^2,\cdots\cdots,c^n$ であり，これらは定理５によって一意的にきまるからである．

方程式（２）の係数が実数の場合には，方程式（２）の複素解全体の中からその実解をえらび出す問題がおこる．

D〕 方程式（２）の特性多項式 $L(p)$ の係数が実数の場合を考えよう．λ を多項式 $L(p)$ の k 重根とすれば，$r=0,1,\cdots\cdots,k-1$ に対して，関数 $t^r e^{\lambda t}$ は方程式（２）の解である．もし根 λ が実数であれば，$t^r e^{\lambda t}$ は実関数であり，またもし根 λ が複素数であれば，$\bar{\lambda}$ も多項式 $L(p)$ の k 重根となるから，解 $t^r e^{\lambda t}$ とともにこれに複素共役な $t^r e^{\bar{\lambda} t}$ も解となる．ゆえに解の系（３）の中には各複素解とともにそれらに共役な解も含まれる．解（４）が実であるためには，実解の係数は実であり，互いに複素共役な解の係数は互いに共役であることが必要かつ十分である．

D〕の証明は §7 の **E**〕の証明とまったく同様で，§7 の **D**〕にもとづく．

例

1. 方程式

$$z^{(5)}+3z^{(4)}+3z^{(3)}+z^{(2)}=0$$

を解いてみよう．この方程式は（２）の形に書かれ，このとき多項式 $L(p)$ はつぎのようになる：

$$p^5+3p^4+3p^3+p^2=p^2(p+1)^3.$$

この多項式の根は

$$\lambda_1=0, \qquad \lambda_2=-1$$

であり，重複度はそれぞれ $k_1=2$, $k_2=3$ である．ゆえに定理５により，この方程式の解の系（３）はつぎのようになる：

$$z_1=1,\ z_2=t,\ z_3=e^{-t},\ z_4=te^{-t},\ z_5=t^2e^{-t}.$$

ゆえに一般解は

$$z=(c^1+c^2t)+(c^3+c^4t+c^5t^2)e^{-t}$$

によって与えられる．

2.　方程式

$$z^{(4)}+2z^{(2)}+z=0$$

を解いてみよう．この場合特性多項式は $L(p)=(p^2+1)^2$ で，その根は $\lambda_1=i$，$\lambda_2=-i$（いずれも2重根）である．ゆえに一般解はつぎの形に書きあらわされる：

$$z=(c^1+c^2t)e^{it}+(c^3+c^4t)e^{-it}.$$

つぎの2つの例は実解をえらび出す一般的な方法を与えるものであって，**D**］からただちにえられる．例3と例4は，§7 の例2および例3にまったく類似している．

3.　§7 の例2では具体的な解は考えず，ただ解の系 $z_1, \cdots\cdots, z_n$ が互いに共役な複素解と実解とからなることだけを仮定した．したがって同様な議論によって，重根の場合にもつぎの一般的な方法の通用することがしめされる：任意の実解は，系（3）において互いに共役な解の各組をそれらのうちの1つの解の実部と虚部とでおきかえることによってえられるものの実数を係数とする1次結合としてあらわされる．

4.　解の系（3）の中の2つの共役な解を

$$t^r e^{\lambda t},\ t^r e^{\bar{\lambda} t}$$

とする．z が実解の場合には，この2つの解に対応する（4）の一部はつぎの形に書かれる：

$$\hat{z}=ct^re^{(\mu+i\nu)t}+\bar{c}t^re^{(\mu-i\nu)t}.$$

いま

$$c=\frac{1}{2}\rho e^{i\alpha}$$

とおくと，

$$\hat{z}=\rho t^r e^{\mu t}\cos(\nu t+\alpha) \tag{14}$$

となる．この方法によって，（4）の中の互いに複素共役な解の各組を，任意の2つの実定数 ρ, α を含む (14) の形の実関数でおきかえることができる．ここでもやはり，§7 の例3と同様に，根 λ の虚部 $\nu \neq 0$ は解に振動的性格を付与し，また根 λ の実部 $\mu \neq 0$ は解に増大性（$\mu>0$ のとき）または減少性（$\mu<0$ のとき）を与える．最後に，根 λ が重根ならば，乗数 t^r があらわれ，これもやはり解に増大性を与える．しかし $\mu<0$ の場合には，$t\to+\infty$ のとき乗数 t^r によってひきおこされる解の増大の度合は，乗数 $e^{\mu t}$ によってひきおこされる減少の度合よりもはるかに小さいため，解は（任意の重複度に対し）t の増加にともなって0に収束する．

5.　例3および例4の結果をもちいて，例2で考察した方程式のすべての実解をつぎのふたとおりの形に書くことができる：

$$z=(a^1+a^2t)\cos t+(b^1+b^2t)\sin t,$$
$$z=\rho_1\cos(t+\alpha_1)+\rho_2 t\cos(t+\alpha_2).$$

§9. 安定な多項式

定係数の線形同次方程式

$$L(p)z=0 \tag{1}$$

の解が $t\to+\infty$ のときにどのような行動をするか（0に収束するか，有界であるか，それとも発散するか）ということは，常微分方程式論の応用全般において非常に重要な問題である．すでに§7の例3と§8の例4で指摘したように，方程式（1）の解の行動に関するこの問題は，多項式 $L(p)$ の根の実部に関係する．ここではこの関係をもっと正確に述べることにする．

A］ 多項式 $L(p)$ が**安定**であるというのは，そのすべての根が負の実部をもつことである．すなわち幾何学的にいえば，すべての根が複素平面の虚軸の左側にあることである．多項式 $L(p)$ のすべての根を

$$\lambda_j=\mu_j+i\nu_j, \qquad j=1,\cdots\cdots,m,$$

とする．もしこの多項式が安定であれば，つぎのような正の数 α が存在する：

$$\mu_j<-\alpha, \qquad j=1,\cdots\cdots,m. \tag{2}$$

この場合，方程式（1）の各解 $\varphi(t)$ に対して

$$|\varphi(t)|<Me^{-\alpha t} \quad (t\geqq 0 \text{ のとき}) \tag{3}$$

となるような正の数 M が存在することをしめそう．

この公式は，方程式（1）の各解が $t\to+\infty$ のときに0に収束するということをしめすだけでなく，0に収束する速さをも評価するものである．

はじめに，公式（3）を方程式（1）の解の系 $z_s(s=1,\cdots\cdots,n)$（§8の（3）を見よ）に対して証明する．

$$z_s=t^r e^{\lambda_j t} \text{ であるから，} \left|\frac{z_s}{e^{-\alpha t}}\right|=|t^r e^{(\mu_j+\alpha)t}|.$$

（2）によって $\mu_j+\alpha$ は負であるから，関数 $t^r e^{(\mu_j+\alpha)t}$ は $t\to+\infty$ のとき0に収束し，ゆえに $t\geqq 0$ のとき有界である．したがって正の数 M_s が存在して

$$\left|\frac{z_s}{e^{-\alpha t}}\right| < M_s \qquad (t \geqq 0 \text{ のとき}),$$

すなわち

$$|z_s| < M_s e^{-\alpha t} \qquad (t \geqq 0 \text{ のとき})$$

がえられる．つぎに，

$$\varphi(t) = c^1 z_1 + c^2 z_2 + \cdots\cdots + c^n z_n$$

を方程式（1）の任意の解とすれば，$t \geqq 0$ のとき次式がえられる：

$$|\varphi(t)| < (|c^1| \cdot M_1 + |c^2| \cdot M_2 + \cdots\cdots + |c^n| \cdot M_n) e^{-\alpha t} = M e^{-\alpha t}.$$

これで不等式（3）が証明された．もし多項式 $L(p)$ の根 λ_j のうちの少なくとも1個でも正の実部 $\mu_j > 0$ をもてば，$t \to +\infty$ のときに発散するような方程式（1）の解 $e^{\lambda_j t}$ が存在することに注意してほしい．

実際の応用にできるかぎり便利な安定条件を見出すための研究がすでに数多くなされている．2次の多項式に対する安定条件は2次方程式の根の公式からただちにえられる（B］を見よ）．任意次数 n の多項式の安定性の問題は，ラウス (Routh) とフルウィッツ (Hurwitz) とによってそれぞれちがった形ではあるが解決されている．しかしラウス-フルウィッツの条件は実際の計算にあたってはあまり便利でないので，あたらしい安定条件を見出す努力がいまもなお続けられている．ここでは，$n=3$ の場合のラウス-フルウィッツの安定条件を証明し，また任意次数 n に対してフルウィッツの安定条件を証明なしで与える．

B］ 実係数 a, b の2次多項式 $L(p) = p^2 + ap + b$ が安定であるのは，その係数が正の場合であり，かつその場合にかぎる．これは，2次方程式の根の公式からすぐにわかる．

C］ 実係数の多項式 $L(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots\cdots + a_n$ が安定であれば，その係数はすべて正である．

証明には，多項式 $L(p)$ をいくつかの1次と2次の実多項式すなわち $p+c$ および p^2+ap+b という形の多項式に因数分解する．多項式 $L(p)$ は安定であるから，上の形の各因数もまた安定である．因数 $p+c$ が安定であるためには c が正でなければならないし，また因数 p^2+ap+b が安定であるためには

a, b がともに正でなければならない．各因数の係数が正であることから，それらの積の係数も正であることがわかる．

つぎの定理は，3次多項式に対する安定性の判定条件を述べたものである．

定理 6. 『実係数の多項式

$$L(p)=a_0p^3+a_1p^2+a_2p+a_3, \quad a_0>0,$$

が安定であるのは，a_1, a_2, a_3 が正数であって，さらに不等式

$$a_1a_2>a_0a_3$$

が成り立つ場合であり，かつこの場合にかぎる』

証明 証明に際しては，多項式

$$L(p)=p^3+ap^2+bp+c \tag{4}$$

を考えることにしよう．一般の 3 次多項式 $L(p)$ の場合は容易に上の場合に帰着される．C］によって，正の係数 a, b, c をもつ多項式（4）が安定であるのは，不等式

$$ab>c \tag{5}$$

が成り立つとき，かつこのときにかぎることを証明すれば十分である．この証明には，多項式の根はその係数の連続関数であることを利用する．

まずはじめに，多項式（4）が純虚根をもつのはいかなる場合であるかをしらべてみよう．$p=0$ は虚軸上にあるから純虚数とみなすことにする．

$$L(p)=(p+a)(p^2+b)-ab+c \tag{6}$$

である．もし0が多項式 $L(p)$ の根であれば $c=0$ となって，仮定 $c>0$ に反する．つぎに $i\omega\,(\omega\neq0)$ が多項式 $L(p)$ の根であったとする．このときもし $-\omega^2+b\neq0$ であれば，$(i\omega+a)(-\omega^2+b)$ の虚部は 0 ではなく実数 $-ab+c$ と相殺されない．ゆえに $i\omega$ が多項式 $L(p)$ の根となるのは，$-\omega^2+b=0$ の場合にかぎる．このときには，

$$L(i\omega)=-ab+c=0$$

となる．逆に $ab=c$ であれば，（6）によって多項式 $L(p)$ は純虚根 $p=\pm i\sqrt{b}$ をもつ．ゆえに（実係数の）多項式 $L(p)$ は $ab=c$ のとき，かつこのときにかぎって純虚根をもつのである．とくに，正の係数 a, b, c が連続的に変わる

ときに多項式 $L(p)$ の根が虚軸を横切ることができるのは，等式 $ab=c$ が成り立つ場合だけである．

いま不等式（5）が成り立っていないとしよう．そうすれば $ab=c$ であるか，または $ab<c$ である．第1の場合には多項式 $L(p)$ は純虚根をもち，したがって安定ではない．第2の場合すなわち

$$ab<c \tag{7}$$

の場合にも，多項式 $L(p)$ は安定でないことをしめそう．それには，係数 a, b を正のまま連続的に，かつ不等式（7）がたもたれるように変化させて0に近づけることにする．このとき，どの根も虚軸の一方の側から他方の側へ移ることはないから，多項式が安定または不安定という性質は変わらない．ところが，$a=b=0$ の場合には多項式 p^3+c がえられ，これは虚軸の右側にある根 $\sqrt[3]{c}\left(\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ をもつ．根は係数の連続関数であるから，十分に小さい正の数 a, b に対して（4）の非安定性（根が虚軸の右側にあること）はたもたれる．

こんどは，不等式（5）が成り立つならば多項式 $L(p)$ は安定であることをしめそう．このため係数 c を正のまま，かつ不等式（5）をたもたせながら，0に収束させることにする．$c=0$ の場合には多項式

$$L(p)=p(p^2+ap+b)$$

がえられ，この1根は0であり他の2根は負の実部をもつ．正の数 c が小さければ，上の2根はわずかしか変化しないから，それらの積はやはり正である．一方，根0は正または負の小さい数に移る．しかし3根全部の積は負の数 $-c$ に等しいから，0に近い根は負である．これで定理6が証明された．

実係数の一般の多項式が安定であるための必要十分条件を述べるため，はじめに術語を定義する．任意の n 次の正方行列

$$P=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots\cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots\cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots\cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

に対して，行列

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots\cdots\cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots\cdots\cdots & p_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots\cdots\cdots & p_{kk} \end{pmatrix}$$

の行列式を行列 P の **k 次の主小行列式**と名づけ，$\Delta_k(P)$ であらわすことにする．すなわち行列式 $\Delta_k(P)$ は行列 P の最初の k 行 k 列の要素からなる．

定理 7. 『実係数の任意の n 次多項式

$$a_0p^n+a_1p^{n-1}+\cdots\cdots+a_n, \qquad a_0>0, \tag{8}$$

に対して，n 次の行列

$$Q=\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots\cdots\cdots\cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots\cdots\cdots\cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots\cdots\cdots\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ 0 & \cdots\cdots & \cdots\cdots & a_{n-2} & a_n \end{pmatrix}$$

をつくる．多項式（8）が安定であるための必要かつ十分な条件は，行列 Q のすべての主小行列式 $\Delta_k(Q)$ $(k=1,\cdots\cdots,n)$ が正となることである』

本書では定理 7 の証明はしない．証明はたとえばつぎの本にある：Н. Г. Четаев, Устойчивость Движения*)，Гостехиздат, М., 1955 (p. 79–83 を見よ).

誤解のないように，行列 Q の定義を正確に述べておこう．行列 Q の第 k 列は

$$\cdots\cdots a_{k+2},\ a_{k+1},\ a_k,\ a_{k-1},\ a_{k-2},\cdots\cdots$$

の形をしていて，要素 a_k は主対角線上にあり，添数 $k+j$ が負または n より大きければ要素 a_{k+j} は 0 に等しい．

例

1. 定理 7 から定理 6 をみちびこう．$n=3$ の場合には行列 Q はつぎのようになる：

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix}.$$

*) 訳注：エヌ・ゲー・チェターエフ，運動の安定性，1955 年.

3つの主小行列式の値は

$$\Delta_1(Q)=a_1,\quad \Delta_2(Q)=a_1a_2-a_0a_3,\quad \Delta_3(Q)=a_3\cdot\Delta_2(Q)$$

である．これらが正であるという条件は，係数 a_0 が正という条件のもとで，つぎの条件に同値である：

$$a_1>0,\quad a_3>0,\quad a_1a_2>a_0a_3.$$

これらの条件全体から係数 a_2 が正であることが容易にわかる．このように，$n=3$ の場合には定理7は定理6そのものになる．

2.　$n=4$ の場合には行列 Q はつぎのようになる：

$$Q=\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{pmatrix}.$$

主小行列式の値はつぎのとおりである：

$$\Delta_1(Q)=a_1,\quad \Delta_2(Q)=a_1a_2-a_0a_3,$$
$$\Delta_3(Q)=a_3\Delta_2(Q)-a_1^2a_4,\quad \Delta_4(Q)=a_4\cdot\Delta_3(Q).$$

これらの小行列式が正であるという条件は，条件 $a_0>0$ のもとで，つぎの条件に同値であることが容易にわかる．

$$a_1>0,\quad a_2>0,\quad a_3>0,\quad a_4>0,$$
$$\Delta_3(Q)=a_1a_2a_3-a_0a_3^2-a_1^2a_4>0.$$

§10.　定係数の線形非同次方程式

ここでは自由項がいわゆる**擬多項式**であるような特別な形の実係数線形方程式の解法を述べる．

A］　$\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_m$ を m 個の複素数，$f_1(t), f_2(t), \cdots\cdots, f_m(t)$ を t の多項式とするとき，

$$F(t)=f_1(t)e^{\lambda_1 t}+f_2(t)e^{\lambda_2 t}+\cdots\cdots+f_m(t)e^{\lambda_m t} \tag{1}$$

の形に書かれる関数 $F(t)$ をすべて**擬多項式**と名づける．§8 の定理5から，定係数の線形同次方程式の解はすべて擬多項式であることを知った．逆に，どんな擬多項式もある定係数線形同次方程式の解になっていることを証明することができる．複素数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_m$ の中に互いに等しいものがある場合には，たとえば $\lambda_1=\lambda_2$ の場合には，この2つの複素数に対応する（1）式中の2つの項は $(f_1(t)+f_2(t))e^{\lambda_1 t}$ の形にまとめられる．したがって，（1）式ではつね

に $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_m$ が互いに異なっていると考えてよい．任意の2つの擬多項式の和，積はやはり擬多項式であり，また任意の擬多項式に演算子 $L(p)$ をほどこした結果も擬多項式であることに注意してほしい．

この§では，$F(t)$ を擬多項式として，方程式

$$L(p)z=F(t) \tag{2}$$

を考察する．方程式（2）とともに，これに対応する同次方程式

$$L(p)u=0 \tag{3}$$

を考えよう．

つぎの主張は§6 の **B**］の注意からすぐにえられる．

B］ $\hat{z}$ を方程式（2）の1つの解とすれば，（2）の任意の解 z はつぎの形に書くことができる：

$$z=\hat{z}+u,$$

ただし u は方程式（3）の解である．

われわれはすでに同次方程式のすべての解を求めることができるから，$F(t)$ が擬多項式の場合に方程式（2）を解くには，その1つの解いわゆる**特殊解**が求まればよい．ところが，擬多項式は（1）の形をしているから，§6 の **C**］の注意によって，問題は $F(t)=f(t)e^{\lambda t}$ （$f(t)$ は多項式）のときに方程式（2）の特殊解を求めることに帰着する．この場合，解はつぎの定理によって求められる．

誤解をさけるため，以下においては，<u>r 次</u>の多項式とは $a_0t^r+a_1t^{r-1}+\cdots\cdots+a_{r-1}t+a_r$ の形の関数のことだと考え，最高次の係数 a_0 が0でないことはかならずしも仮定しないことにする．

定理 8. 『非同次方程式

$$L(p)z=f(t)e^{\lambda t} \tag{4}$$

において，$f(t)$ は t の r 次多項式，λ は複素数とする．また数 k は $L(\lambda)\neq0$ の場合には0に等しく，$L(\lambda)=0$ の場合には根 λ の重複度に等しいとする．このとき，方程式（4）の特殊解でつぎの形のものが存在する：

$$z=t^kg(t)e^{\lambda t} \quad (g(t) \text{ は } t \text{ の } r \text{ 次多項式}). \tag{5}$$

多項式 $g(t)$ の係数は未定係数法によって求めることができる』

証明

$$f(t)=a_0t^r+f^*(t) \tag{6}$$

とおいて,

$$g(t)=b_0t^r+g^*(t) \tag{7}$$

の形の多項式 $g(t)$ を求めることにする．ただし多項式 $f^*(t), g^*(t)$ の次数は $r-1$ である．数 k のきめかたから,

$$L(p)=M(p)(p-\lambda)^k,\quad M(\lambda)\fallingdotseq 0, \tag{8}$$

となる．関数（5）が方程式（4）の解となるためには，つぎの条件がみたされねばならない（§8 の A］を見よ）：

$$L(p)e^{\lambda t}t^kg(t)=e^{\lambda t}L(p+\lambda)t^kg(t)=e^{\lambda t}f(t).$$

すなわち多項式 $g(t)$ は条件

$$L(p+\lambda)t^kg(t)=f(t) \tag{9}$$

をみたさねばならない．多項式 $M(p+\lambda)$ の自由項は $M(\lambda)\fallingdotseq 0$ であるから,

$$M(p+\lambda)=M(\lambda)+M^*(p)p,\quad M(\lambda)\fallingdotseq 0, \tag{10}$$

と書ける．

関係式（6),（7),（8）と (10) に注意して，多項式 $g(t)$ に対する条件（9）をこんどはつぎの形に書くことができる：

$$b_0M(\lambda)p^kt^{k+r}+b_0M^*(p)p^{k+1}t^{k+r}+L(p+\lambda)t^kg^*(t)=a_0t^r+f^*(t). \tag{11}$$

等式 (11) の中の t^r を含む項を等置すれば,

$$b_0M(\lambda)p^kt^{k+r}=a_0t^r \tag{12}$$

がえられ，これよりわれわれが求めている多項式 $g(t)$ の t^r の係数 b_0 が一意的にきまる ($M(\lambda)\fallingdotseq 0$ だから)．つぎに，係数 b_0 がすでにきまったとすれば，関係式 (12) によって，(11) 式はつぎのようになる：

$$L(p+\lambda)t^kg^*(t)=f^*(t)-b_0M^*(p)p^{k+1}t^{k+r}. \tag{13}$$

この等式の右辺は $r-1$ 次の既知多項式，左辺の $g^*(t)$ は $r-1$ 次の未知多項式である．方程式 (13) と方程式（9）とのちがいは，前者に含まれる多項式の次数が後者のそれよりも1次低いという点だけである．したがって，いまま

で方程式（9）に対しておこなったのと同様な計算を方程式 (13) に対してくり返せば，多項式 $g^*(t)$ の最高次の項 t^{r-1} の係数 b_1 が計算される．この手順をさらに続ければ，多項式 $g(t)$ が条件（9）をみたすように係数 $b_0, b_1, \cdots\cdots, b_r$ が順次にきめられる．これで方程式（4）の解で（5）の形のものが求まった．

もちろん多項式 $g(t)$ の係数を未知数と考えて，（5）の形の解を直接方程式（4）に代入した上，（4）の両辺の同類項の係数を等置することによって，係数に関する連立1次方程式をつくることもできよう．この連立1次方程式が解けることは，上の計算のしめすところである．

これで定理8が証明された．

注　意　多項式 $g(t)$ の係数を求めるための連立1次方程式の係数の行列は三角形型である．なぜなら，$t^r e^{\lambda t}$ の係数を等置するときには b_0 だけを含む方程式がえられ，また $t^{r-1}e^{\lambda t}$ の係数を等置するときには b_0 と b_1 だけを含む方程式がえられ，……となるからである．

擬多項式の1つの重要な性質を述べよう．

C〕 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_m$ が互いに異なる数であるとき，擬多項式

$$F(t)=f_1(t)e^{\lambda_1 t}+f_2(t)e^{\lambda_2 t}+\cdots\cdots+f_m(t)e^{\lambda_m t}$$

がある区間 $r_1<t<r_2$ で恒等的に0に等しければ，多項式 $f_1(t), f_2(t), \cdots\cdots, f_m(t)$ はすべて恒等的に0に等しい．したがってまた，擬多項式 $F(t)$ のすべての係数が0に等しい．ゆえに2つの擬多項式 $F(t)$ と $F^*(t)$ とがある区間 $<t<r_2$ で互いに恒等的に等しければ，それらの対応する係数は一致することがわかる．

C〕を個数 m に関する帰納法によって証明することにする．m を擬多項式 $F(t)$ の階数と名づける．$m=1$ の場合には等式 $F(t)=f_1(t)e^{\lambda_1 t}=0$ と $f_1(t)=0$ とは同値であるから，**C**〕は正しい．こんどは，**C**〕が階数 $m-1$ $(m\geqq 2)$ の場合に正しいと仮定して，それが階数 m の場合にも正しいことを証明する．もし擬多項式 $F(t)$ が区間 $r_1<t<r_2$ で恒等的に0に等しければ，擬多項式

$$G(t)=p^{l+1}(F(t)e^{-\lambda_m t})$$

も同じ区間で恒等的に0に等しい．ただし p は微分演算子，l は多項式 $f_m(t)$

の次数である．§8 の A］によって，

$$G(t)=g_1(t)e^{(\lambda_1-\lambda_m)t}+g_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_m)t}+\cdots\cdots+g_{m-1}(t)e^{(\lambda_{m-1}-\lambda_m)t}$$

となる．ただし

$$g_i(t)=(p+\lambda_i-\lambda_m)^{l+1}f_i(t), \qquad i=1,\cdots\cdots,m-1,$$

である．擬多項式 $G(t)$ の階数は $m-1$ で，$G(t)$ は区間 $r_1<t<r_2$ で恒等的に 0 に等しいから，帰納法の仮定によって多項式 $g_1(t),\cdots\cdots,g_{m-1}(t)$ は恒等的に 0 に等しい．いま多項式 $f_1(t),\cdots\cdots,f_{m-1}(t)$ のどれかが恒等的に 0 でないと仮定して，たとえば $f_1(t)\neq 0$ と仮定して，これから矛盾をみちびこう．多項式 $f_1(t)$ の次数を k とする．すなわち $f_1(t)=a_0t^k+a_1t^{k-1}+\cdots\cdots+a_k$ とする（$a_0\neq 0$）．容易にわかるように

$$g_1(t)=(p+\lambda_1-\lambda_m)^{l+1}f_1(t)=(\lambda_1-\lambda_m)^{l+1}a_0t^k+\cdots\cdots$$

となるが，多項式 $g_1(t)$ は区間 $r_1<t<r_2$ で恒等的に 0 に等しいのだから，

$$(\lambda_1-\lambda_m)^{l+1}a_0=0.$$

λ_1 と λ_m とは互いに異なるから，$a_0=0$ となって矛盾がえられる．ゆえに多項式 $f_1(t),\cdots\cdots,f_{m-1}(t)$ の係数はすべて 0 に等しく，$F(t)=f_m(t)e^{\lambda_m t}$ となる．これより，多項式 $f_m(t)$ の係数もすべて 0 に等しいことがわかる．

2つの擬多項式 $F(t)$ と $F^*(t)$ とが区間 $r_1<t<r_2$ で恒等的に等しい場合については，擬多項式 $F(t)-F^*(t)$ を考えればよい．

これで C］が証明された．

例

1. 方程式

$$\ddot{z}+z=t\cos t=\frac{1}{2}te^{it}+\frac{1}{2}te^{-it} \tag{14}$$

の特殊解を求めてみよう．方程式

$$\ddot{z}+z=\frac{1}{2}te^{it}, \tag{15}$$

$$\ddot{z}+z=\frac{1}{2}te^{-it}, \tag{16}$$

を別々に解くことにする．明らかに z が方程式 (15) の解であれば $\bar{z}$ は方程式 (16) の解である．したがって方程式 (15) だけを解けばよい．この場合には $r=1$, $\lambda=i$, $k=1$ であるから，

$$t(c^1+c^2t)e^{it}$$

の形の特殊解を求めればよい．関係式（9）はつぎのようになる：

$$[(p+i)^2+1](c^1t+c^2t^2)=\frac{1}{2}t,$$

すなわち

$$(p^2+2ip)(c^1t+c^2t^2)=\frac{1}{2}t.$$

これより

$$2c^2+2ic^1+4ic^2t=\frac{1}{2}t$$

となるから，$c^2=-\frac{1}{8}i$，$c^1=ic^2=\frac{1}{8}$．けっきょく，方程式 (15) の特殊解は

$$z=\left(\frac{1}{8}t-\frac{i}{8}t^2\right)e^{it}$$

となり，方程式 (14) の解は

$$z+\bar{z}=\frac{1}{8}t(e^{it}+e^{-it})+\frac{1}{8i}t^2(e^{it}-e^{-it})=\frac{t}{4}\cos t+\frac{t^2}{4}\sin t$$

であることがわかる．

2. 関数

$$f(t)=\cos 2t\cdot\cos 3t\cdot e^{4t}$$

を考えよう．各因子 $\cos 2t$, $\cos 3t$, e^{4t} は擬多項式であるから，それらの積 $f(t)$ もやはり擬多項式である．この擬多項式を（1）の形になおしてみる：

$$\cos 2t\cdot\cos 3t\cdot e^{4t}=\frac{e^{2it}+e^{-2it}}{2}\cdot\frac{e^{3it}+e^{-3it}}{2}\cdot e^{4t}$$

$$=\frac{1}{4}e^{(4+5i)t}+\frac{1}{4}e^{(4+i)t}+\frac{1}{4}e^{(4-i)t}+\frac{1}{4}e^{(4-5i)t}.$$

非同次方程式を定理8によって解く場合には，擬多項式を（1）の形になおすのが有効である．

§11. 消　去　法

いままでは単独の定係数線形方程式の解法をまなんできたが，じつは一般の定係数の線形方程式系をもある意味で単独の方程式に帰着させることができる．これは連立1次方程式の理論で使われているのと同様な消去法によっておこなわれる．ここではこの方法と，これをもちいてえられるいくつかの結果を述べる．

方程式系

$$\sum_{s=1}^{n} L_s^j(p)x^s = f^j(t), \qquad j=1, \cdots\cdots, n, \tag{1}$$

を考察することにする．ここに $x^1, \cdots\cdots, x^n$ は独立変数 t の未知関数，$f^1(t), \cdots\cdots, f^n(t)$ は t の既知関数である．記号 $L_s^j(p)$ は微分演算子 p に関する定係数の多項式である．したがって $L_s^j(p)x^s$ は，関数 x^s とその導関数に関する定係数の1次式である．系（1）の方程式の個数は未知関数の個数に等しい．

系（1）の x^s に関する階数を q_s であらわせば，系（1）の階数は $q=q_1+q_2+\cdots\cdots+q_n$ である．（1）を解く場合には，いうまでもなく，各未知関数 x^s は階数 q_s までのすべての導関数をもつと仮定しなければならない．しかし，これ以上の階数の導関数の存在については一般に何もいえない．

系（1）に消去法を適用する場合には，未知関数 x^s および関数 $f^j(t)$ はいずれも十分な回数微分可能であると仮定する．このように十分な回数微分可能な解だけが考察されるので，解の種類が制限される．他方，関数 $f^j(t)$ が十分な回数微分可能であるような方程式（1）だけが考察されるので，方程式の種類も制限される．実際には $f^j(t)$ が十分な回数微分可能ならば解 $x^1, \cdots\cdots, x^n$ も十分な回数微分可能であることが証明されるので，最初の制限はとりさることができる（例3と例4を見よ）．

消去法の説明にうつろう．

A］ 方程式系（1）の行列

$$\begin{pmatrix} L_1^1(p) & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & L_n^1(p) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ L_1^n(p) & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & L_n^n(p) \end{pmatrix} \tag{2}$$

を考えよう．行列（2）の各要素 $L_s^j(p)$ は p に関する多項式であるから，（2）の行列式 $D(p)$ とその小行列式を計算することができる．行列（2）の要素 $L_s^j(p)$ の余因数を $M_j^s(p)$ であらわせば，代数学からつぎの恒等式の成り立つことがわかる：

$$\sum_{j=1}^{n} M_j^i(p)L_s^j(p) = \delta_s^i D(p), \tag{3}$$

ただし，δ^i_s はいわゆる**クロネッカーの記号**：

$$\delta^i_i=1, \quad i \neq s \text{ のとき } \delta^i_s=0$$

である. 方程式（1）に多項式 $M^i_j(p)$ をかけ（すなわち一連の微分操作, 数との積および和をつくり）, j について加え合わせると, つぎの等式がえられる：

$$\sum_{j,s=1}^{n} M^i_j(p)L^j_s(p)x^s=\sum_j M^i_j(p)f^j(t). \tag{4}$$

（等式（1）から等式（4）をみちびくときに，関数 x^s と $f^j(t)$ とが十分高い階数の導関数をもつという仮定を使用した）.（3）によって，等式（4）はつぎの形に書くことができる：

$$D(p)x^i=\sum_j M^i_j(p)f^j(t). \tag{5}$$

この方程式系（5）（$i=1, \cdots\cdots, n$）の特徴は，各未知関数 x^i が（5）の1つの方程式だけに含まれていることである．したがって関数系 $x^1, \cdots\cdots, x^n$ が系（1）の解であれば，個々の関数 x^i はそれぞれ（5）の 1 つの方程式の解になっていることがわかった.

しかし，各 i に対して（5）の方程式の解 x^i を任意にとって関数系 $x^1, \cdots\cdots, x^n$ をつくったとき，この関数系が系（1）の解になると考えてはいけない．系（1）の一般解 $x^1, \cdots\cdots, x^n$ を求めるには，（5）（$i=1, \cdots\cdots, n$）の各方程式の一般解 x^i を求めた上で，関数系 $x^1, \cdots\cdots, x^n$ が方程式系（1）をみたすための条件（積分定数の間の関係）を求めねばならない.

ここで，消去法によっていくつかの結果をみちびいてみよう．まずはじめに同次方程式系

$$\sum_{s=1}^{n} L^j_s(p)x^s=0, \qquad j=1, \cdots\cdots, n, \tag{6}$$

に対して，**A**〕からえられる結果を述べる.

B〕 関数系 $x^1, \cdots\cdots, x^n$ が系（6）の解であれば，各関数 x^i は方程式

$$D(p)x^i=0$$

をみたす．ただし $D(p)$ は系（6）からつくった行列（$L^j_s(p)$）の行列式である．ゆえに $D(p)$ が安定な多項式であれば，系（6）の任意の解 $x^1, \cdots\cdots, x^n$

は不等式

$$(x^1)^2+\cdots\cdots+(x^n)^2<R^2e^{-2\alpha t} \quad (t\geqq 0 \text{ のとき}) \tag{7}$$

をみたすことがわかる．ただし，α は系（6）に関係する正の定数，R は解 $x^1, \cdots\cdots, x^n$ に関係する定数である．

不等式（7）は §9 の不等式（3）からすぐにえられる．

つぎに，消去法による同次方程式系（6）の解法を述べよう．

系（6）をベクトルの記法によって

$$L(p)\boldsymbol{x}=0 \tag{8}$$

と書きかえよう． ここに $L(p)=(L_s^j(p))$ は系（6）の係数の行列で，$\boldsymbol{x}=(x^1, \cdots\cdots, x^n)$ である．

C］ 系（6）の行列式 $D(p)$ は恒等的には 0 に等しくないものと仮定し，λ を多項式 $D(p)$ の k 重根とする．方程式（8）の解で

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{g}(t)e^{\lambda t} \tag{9}$$

の形のものを求めることにしよう．ただし $\boldsymbol{g}(t)=(g^1(t), \cdots\cdots, g^n(t))$ は t に関して $k-1$ 次の（係数が未定の）多項式

$$g^1(t), \cdots\cdots, g^n(t) \tag{10}$$

を成分とするベクトルである．（9）の形をした（8）の解を，根 λ に**対応する解**とよぶことにしよう．

（9）を解と考えて（8）に代入すれば，

$$0=L(p)\boldsymbol{g}(t)e^{\lambda t}=e^{\lambda t}L(p+\lambda)\boldsymbol{g}(t)$$

がえられる（§8 の **A］** を見よ）．この両辺を $e^{\lambda t}$ で割って

$$L(p+\lambda)\boldsymbol{g}(t)=0. \tag{11}$$

したがって，ベクトル（9）が方程式（8）の解となるのは多項式（10）が条件（11）をみたす場合であり，かつこの場合にかぎる．ベクトルの記法による方程式（11）を成分ごとに書きあらわせば，n 個の関係式

$$\sum_{s=1}^{n} L_s^j(p+\lambda)g^s(t)=0, \quad j=1, \cdots\cdots, n, \tag{12}$$

がえられる．等式（12）の左辺はいずれも t に関して $k-1$ 次の多項式であり，

その係数はすべて多項式 (10) の係数の 1 次同次式である．これらの係数を 0 に等置することによって，多項式 (10) の係数に関する同次 1 次方程式の系がえられる．この方程式系は方程式 (11) と同値である．

けっきょく，(9) の形をした (8) の解を求めることは，代数的なある同次連立 1 次方程式を解くことに帰着する．上に述べたことからわかるように，(9) の形の解は無限区間 $-\infty<t<+\infty$ 全体で定義されている．

方程式 (8) の解をすべて求める問題は，つぎの定理によって解決される．

定理 9. 『系 (6) の行列式 $D(p)$ は恒等的には 0 にならないと仮定し，

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_m$$

を多項式 $D(p)$ の互いに異なるすべての根とする．このとき方程式 (8) の任意の解 $\boldsymbol{x}$ はつぎの形に書かれる：

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\cdots\cdots+\boldsymbol{x}_m, \tag{13}$$

ただし $\boldsymbol{x}_i$ は根 λ_i に対応する方程式 (8) の解である (C] を見よ)．したがって，方程式 (8) の解はいずれも t のすべての値に対して定義されている』

証明　$\boldsymbol{x}=(x^1, \cdots\cdots x^n)$ を区間 $r_1<t<r_2$ で定義された方程式 (8) のある解とし，この解がこの区間において (13) の形に書きあらわせることをしめそう．B] により，各関数 x^s $(s=1, \cdots\cdots, n)$ は区間 $r_1<t<r_2$ において方程式

$$D(p)x^s=0$$

をみたすから，§8 の C] により，この区間においてつぎの形に書かれる：

$$x^s=\sum_{i=1}^{m} g_i^s(t)e^{\lambda_i t}, \qquad s=1, \cdots\cdots, n, \tag{14}$$

ただし $g_i^s(t)$ は k_i-1 次の多項式で，k_i は根 λ_i の重複度である．したがって，方程式 (8) の解 $\boldsymbol{x}$ はいずれも，その定義域 $r_1<t<r_2$ でつぎの形に書きあらわされる：

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{g}_1(t)e^{\lambda_1 t}+\cdots\cdots+\boldsymbol{g}_m(t)e^{\lambda_m t} \tag{15}$$

ここに $\boldsymbol{g}_i(t)$ はその各成分が k_i-1 次の多項式であるようなベクトルである．定理 9 を証明するには，けっきょく，等式 (15) の右辺にある各項 $\boldsymbol{g}_i(t)e^{\lambda_i t}$ が方程式 (8) の解であることをしめせばよい．そのため，解 (15) を方程式

（8）に代入すると

$$0=L(p)(\boldsymbol{g}_1(t)e^{\lambda_1 t}+\cdots\cdots+\boldsymbol{g}_m(t)e^{\lambda_m t})$$
$$=e^{\lambda_1 t}L(p+\lambda_1)\boldsymbol{g}_1(t)+\cdots\cdots+e^{\lambda_m t}L(p+\lambda_m)\boldsymbol{g}_m(t) \qquad (16)$$

がえられる．$\lambda_1, \cdots\cdots, \lambda_m$ は互いに異なるから，§10 の C］によって，等式 (16) から次式をうる：

$$e^{\lambda_i t}L(p+\lambda_i)\boldsymbol{g}_i(t)=0, \qquad i=1, \cdots\cdots, m,$$

すなわち

$$L(p)\boldsymbol{g}_i(t)e^{\lambda_i t}=0, \qquad i=1, \cdots\cdots, m.$$

これはまさに $\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{g}_i(t)e^{\lambda_i t}$ が方程式（8）の解であることをしめしている．これで定理9が証明された．

例

1. 消去法によって方程式系

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}^1+x^1+\dot{x}^2=0,\\ \ddot{x}^1-x^1+\ddot{x}^2+x^2=0,\end{aligned}\right\}$$

を解いてみよう．これを記号 p をもちいて書きあらわすと：

$$\left.\begin{aligned}(p+1)x^1+px^2=0,\\ (p^2-1)x^1+(p^2+1)x^2=0.\end{aligned}\right\}$$

この方程式系の行列式は，容易にわかるように p^2+2p+1 に等しく，これは2重根 $\lambda=-1$ をもつ．ゆえに定理9によって，上の方程式系の解を

$$\left.\begin{aligned}x^1=(at+b)e^{-t},\\ x^2=(ct+d)e^{-t},\end{aligned}\right\}$$

の形で求めればよい．これらの関数を第1の方程式に代入して e^{-t} で割ると

$$a+c-ct-d=0,$$

がえられ，これより $c=0$, $a=d$.（第2の方程式に代入した場合にも係数に対して同様な関係がえられる）．ゆえに求める一般解はつぎの形に書きあらわされる：

$$\left.\begin{aligned}x^1=(at+b)e^{-t},\\ x^2=ae^{-t},\end{aligned}\right\}$$

ここに a, b は任意の定数である．

2. 消去法を正規形の定係数線形同次方程式系

$$\dot{x}^j=\sum_{s=1}^{n}a_s^j x^s, \qquad j=1, \cdots\cdots, n, \qquad (17)$$

に適用してみよう（このような系は §14 でさらにくわしく研究される）．系 (17) を記号 p をもちいて書きかえると，

$$px^j=\sum_{s=1}^{n}a_s^jx^s, \qquad j=1,\cdots\cdots,n,$$

すなわち

$$\sum_{s=1}^{n}(a_s^j-p\delta_s^j)x^s=0, \qquad j=1,\cdots\cdots,n, \tag{18}$$

となる．ここに δ_s^j はクロネッカーの記号である．(18) は，(6) で

$$L_s^j(p)=a_s^j-p\delta_s^j$$

とおいた特別の場合であり，このとき行列式 $D(p)$ は系 (17) の行列の特性多項式に等しいことがわかる．それで系 (18) の解は，C] で述べた未定係数法と定理 9 とによって求められる．

系 (17) はベクトルの記法によって

$$\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x} \tag{19}$$

の形に書くことができる．ここに $A=(a_s^j)$，$\boldsymbol{x}=(x^1,\cdots\cdots,x^n)$．特性多項式 $D(p)$ の根 $\lambda_1,\cdots\cdots,\lambda_n$ がすべて単根の場合には，固有値 λ_i に対応する (19) の解は

$$\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{g}_ie^{\lambda_it} \tag{20}$$

となる．ただしベクトル $\boldsymbol{g}_i$ の各成分は 0 次の多項式すなわち定数である．解 (20) を方程式 (19) に代入すると

$$\lambda_i\boldsymbol{g}_ie^{\lambda_it}=A\boldsymbol{g}_ie^{\lambda_it}$$

となる．この両辺を e^{λ_it} で割れば

$$A\boldsymbol{g}_i=\lambda_i\boldsymbol{g}_i$$

がえられる．これより $\boldsymbol{g}_i$ は行列 A の固有値 λ_i に対応する固有ベクトルであることがわかる．固有値が単根の場合には，同一の固有値 λ_i に対応する固有ベクトルはすべて互いに比例するから，λ_i に対応する 1 つの固有ベクトル $\boldsymbol{h}_i$ を取ってこれを固定すれば，$\boldsymbol{g}_i=c^i\boldsymbol{h}_i$ となる．ここに c^i は定数である．けっきょく，行列 A の固有値がすべて単根の場合には，方程式 (19) の任意の解 $\boldsymbol{x}$ はつぎの形に書ける：

$$\boldsymbol{x}=c^1\boldsymbol{h}_1e^{\lambda_1t}+\cdots\cdots+c^n\boldsymbol{h}_ne^{\lambda_nt} \tag{21}$$

ここに $c^1,\cdots\cdots,c^n$ は定数である．

3. 定係数の線形系

$$\sum_{s=1}^{n}L_s^j(p)x^s=f^j(t), \qquad j=1,\cdots\cdots,n, \tag{22}$$

を考えよう ((1) を見よ)．未知関数 x^i に関する階数を q_i とすると，

$$q=q_1+q_2+\cdots\cdots+q_n$$

は系 (22) の階数である．系 (22) からつくった行列

$$\begin{pmatrix} L_1^1(p) & \cdots\cdots\cdots\cdots & L_n^1(p) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ L_1^n(p) & \cdots\cdots\cdots\cdots & L_n^n(p) \end{pmatrix} \tag{23}$$

の行列式を $D(p)$ とする．多項式 $D(p)$ の次数はあきらかに q を越えない．とくに

次数が q に等しい場合には，系 (22) は正規化可能であるという．この場合には，(22) を最高階数の導関数

$$(x^1)^{(q_1)},\cdots\cdots,(x^n)^{(q_n)} \tag{24}$$

について解くことができて，(22) を正規形（§4 の **B**］を見よ）にすることができる．

これを証明しよう．仮定によって多項式 $L_s^j(p)$ の次数は q_s を越えないから，

$$L_s^j(p)=a_s^j p^{q_s}+\cdots\cdots \tag{25}$$

と書くことができる．ここで q_s より小さい次数の項は……であらわしてある．(25) 式に注意して (23) の行列式 $D(p)$ を計算すれば，行列 (a_s^j) の行列式を Δ とするとき，

$$D(p)=\Delta\cdot p^q+\cdots\cdots$$

となることが容易にわかる．ここで q より小さい次数の項は省略してある．この式から多項式 $D(p)$ のとりうる最高の次数は q であり，とくに次数が q の場合には $\Delta\neq 0$ であることがわかる．系 (22) における最高階数の導関数 (24) に着目すれば，

$$\sum_{s=1}^{n} a_s^j (x^s)^{(q_s)}+\cdots\cdots=f^j(t),\qquad j=1,\cdots\cdots,n, \tag{26}$$

となる．したがって系 (22) が正規化可能であれば $\Delta\neq 0$ であり，系 (26) を最高階数の導関数 (24) について解くことができる．

正規化可能な系 (22) は正規形になおせるのであるから，§3 の例2で述べたように，正規化可能な系 (22) のすべての解が任意に与えられた回数だけ微分可能であるためには，系 (22) の右辺の $f^j(t)$ が十分な回数微分可能であればよい．

4.　こんどは系 (22) の行列式 $D(p)$ が恒等的には0でないが，多項式 $D(p)$ の次数が系 (22) の階数 q よりも小さい場合を考えよう．この場合にもやはり，系 (22) のすべての解が任意に与えられた回数だけ微分可能であるためには，右辺の $f^j(t)$ が十分な回数微分可能であればよいことをしめそう．

仮定によって多項式 $D(p)$ の次数は q より小さいから，行列式 Δ は0に等しい．したがって，行列 (a_s^j) の列の間に1次従属な関係がある．この1次関係の係数を $b^1,\cdots\cdots,b^n$ とすれば，$b^1,\cdots\cdots,b^n$ の中には0でないものがある．いま関数 $x^1,\cdots\cdots,x^n$ の添数を変更して，つぎの関係が成り立つようにしよう：

$$b^1\neq 0,\ b^2\neq 0,\cdots\cdots,b^m\neq 0,\ b^{m+1}=\cdots\cdots=b^n=0,\qquad 1\leqq m\leqq n.$$

$$q_1\geqq q_2,\ q_1\geqq q_3,\cdots\cdots,q_1\geqq q_m. \tag{27}$$

(27) より $b^1\neq 0$ だから，とくに $b^1=1$ と考えてよい．

ここで未知関数 $x^1,\cdots\cdots,x^n$ のかわりに，あたらしい未知関数 $y^1,\cdots\cdots,y^n$ を次式によって導入する：

$$\left.\begin{aligned} x^1=y^1\ ;\ x^i=y^i+b^i p^{q_1-q_i}y^1,\ i=2,\cdots\cdots,m\ ;\\ x^i=y^i,\ i=m+1,\cdots\cdots,n.\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

関係式 (28) はあたらしい未知関数 $y^1,\cdots\cdots,y^n$ について解くことができる．すなわち

$$\left.\begin{aligned} y^1=x^1\ ;\ y^i=x^i-b^ip^{q_1-q_i}x^1,\ \ i=2,\cdots\cdots,m\ ; \\ y^i=x^i,\ \ i=m+1,\cdots\cdots,n, \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

となる．未知関数 $x^1,\cdots\cdots,x^n$ をあたらしい未知関数 $y^1,\cdots\cdots,y^n$ でおきかえると，あらたに方程式系

$$\sum_{s=1}^{n}\overset{*}{L}{}^j_s(p)y^s=f^j(t), \qquad j=1,\cdots\cdots,n, \tag{30}$$

がえられる．ただちにわかるように，関数 y^1 に関する系 (30) の階数 q_1^* は q_1 より小であり，その他の未知関数 $y^2,\cdots\cdots,y^n$ に関する階数はそれぞれ $q_2,\cdots\cdots,q_n$ に等しい．したがって系 (30) の階数 q^* は系 (22) の階数 q よりも小である．

もし変換 (28) を変数 $y^1,\cdots\cdots,y^n$ から $x^1,\cdots\cdots,x^n$ への（p の多項式を係数とする）1次変換，(29) をその逆1次変換と考えれば，この1次変換 (28) と (29) との行列式は $+1$ に等しいことがわかる．ゆえに，系 (30) の行列式 $D^*(p)$ は系 (22) の行列式 $D(p)$ に等しいことがわかる．したがって系 (30) の階数とその行列式（p の多項式）の次数との差は，系 (22) でのそれよりも小である．上述の変換を有限回おこなえば，最後に正規化可能な系がえられる．

つぎに，

$$x^i=\varphi^i(t), \qquad i=1,\cdots\cdots,n, \tag{31}$$

を系 (22) の解とする．未知関数 x^i に関する系 (22) の階数は q_i に等しいから，関数 $\varphi^i(t)$ はもちろん q_i 回微分可能である．変換 (29) によって系 (22) の解 (31) には，系 (30) の解

$$y^i=\psi^i(t), \qquad i=1,\cdots\cdots,n, \tag{32}$$

が対応する．関係式 (29) からわかるように，関数 $\psi^i(t)$ は q_i 回微分可能である．以上より，系 (22) の1つの解 (31) からは系 (30) の1つの解 (32) がえられることがわかった．したがって系 (22) より系 (30) に移行する際にはどの1つの解も失われない．このような一連の変換によって，どの解も任意に与えられた回数だけ微分可能であるような正規化可能な系に到達するから，変換 (28) によって，系 (22) の解 (31) も任意に与えられた回数だけ微分可能なことがわかる．

§12. 複素振幅の方法

振動現象を問題にする工学と物理学のいろいろな分野では**調和振動**が重要な役割をはたしている．調和振動は数学的には，関数

$$r\cos(\omega t+\alpha) \qquad (r\geqq 0) \tag{1}$$

によって与えられる．r は振動の**振幅**，α は**初期位相**，また ω は振動の頻度を決定し，ふつう**振動数**とよばれている．実際には，1秒間の振動数を ν とすれば，

$$\omega=2\pi\nu$$

である．したがってωは 2π 秒間の振動数であって，1 秒間のそれではない．すでに §4 の例1で見たように，方程式

$$\ddot{x}+\omega^2x=0 \tag{2}$$

の一般解は，任意の振幅と位相とをもつ振動数ωの調和関数（1）である．方程式（2）は**調和振動の方程式**とよばれる．

調和振動について研究する際，しばしば方程式

$$L(p)x=r\cos(\omega t+\alpha) \tag{3}$$

を扱う必要がおこる．この右辺は調和関数であり，調和関数は擬多項式であるから，定理8で述べた方法によって，容易に方程式（3）を解くことができる．多項式 $L(p)$ の係数が実数の場合には，定理8をいくらかちがった形で利用することができる．この方法を電気工学では**複素振幅の方法**とよんでいるが，これを以下に説明する．

A］ 実調和関数（1）と同時に，これに**対応する**調和関数

$$\rho e^{i\omega t} \tag{4}$$

を考える．ただし

$$\rho=re^{i\alpha} \tag{5}$$

とする．

$$\rho e^{i\omega t}=re^{i(\omega t+\alpha)}=r\cos(\omega t+\alpha)+ir\sin(\omega t+\alpha)$$

であるから，複素数（4）の実部は関数（1）に一致する．複素数（5）は複素調和関数（4）の**複素振幅**といわれる．（5）は実振幅 r と初期位相 α とを含み，

$$r=|\rho|$$

である．多項式 $L(p)$ の係数が実数の場合には，方程式（3）を解くため，はじめに方程式

$$L(p)z=\rho e^{i\omega t} \tag{6}$$

を解く．すぐにわかるように，もし $z=x+iy$ が方程式（6）の解であれば，xは方程式（3）の解である．

$$L(i\omega)\neq 0 \tag{7}$$

と仮定して，方程式（6）の解を複素振幅 $\sigma=se^{i\beta}$ をもつ調和関数 $z=\sigma e^{i\omega t}$ の形で求めてみよう（定理8を見よ）．関数 $z=\sigma e^{i\omega t}$ を方程式（6）に代入すれば，つぎの関係がえられる（§7 の B］を見よ）：

$$\sigma=\frac{\rho}{L(i\omega)}. \tag{8}$$

こうして，方程式（3）の解はつぎのような関数として求まる：

$$x=s\cos(\omega t+\beta). \tag{9}$$

この解の振幅 s と初期位相 β は次式からきまる（（8）を見よ）：

$$se^{i\beta}=\frac{re^{i\alpha}}{L(i\omega)}.$$

とくに $s=|\sigma|=\dfrac{r}{|L(i\omega)|}$ である．多項式 $L(p)$ が安定であれば，もちろん（7）が成り立つから，この場合，方程式（3）の任意の解はつぎのようになる：

$$x=u+s\cos(\omega t+\beta), \tag{10}$$

ここに u は同次方程式 $L(p)u=0$ の解である．この同次方程式の解 u は $t\to+\infty$ のとき0に収束するから，方程式（3）の任意の解は解（9）に収束する．解（9）は**定常解**とよばれる．これは**定常**過程に対応し，一方解（10）は**過渡的**過程をあらわすものである．定常解（9）はすべての解（10）の中でただ1つの周期解である．

複素振幅の方法を適用する場合には通常，実方程式（3）からではなく，ただちに複素方程式（6）から出発する．

こんどは複素振幅の方法を方程式系に適用する場合を述べよう．問題は，実係数の方程式系

$$\sum_{s=1}^{n} L_s^j(p)x^s=r^j\cos(\omega t+\alpha^j), \quad j=1,\cdots\cdots,n, \tag{11}$$

の特殊解を求めることである．ただし右辺は同一の振動数 ω の調和関数とする．

B］ 系（11）の行列式 $D(p)$（§11 の **A］** を見よ）は $p=i\omega$ に対して0にならないとする．系（11）の解を求めるため，はじめに方程式系

$$\sum_{k=1}^{n} L_k^j(p) z^k = \rho^j e^{i\omega t}, \qquad j=1, \cdots\cdots, n, \tag{12}$$

を解くことにする．ここに $\rho^j = r^j e^{i\alpha j}$．多項式 $L_k^j(p)$ の係数は実数であるから，系 (12) の任意の解 $z^1, \cdots\cdots, z^n$ から系 (11) の解

$$x^k = \mathrm{Re}\, z^k, \qquad k=1, \cdots\cdots, n,$$

がえられる．さて，系 (12) の解を

$$z^k = \sigma^k e^{i\omega t}, \qquad k=1, \cdots\cdots, n, \tag{13}$$

の形で求めよう．関数 (13) を系 (12) に代入し両辺を $e^{i\omega t}$ で割れば，方程式系

$$\sum_{k=1}^{n} L_k^j(i\omega)\sigma^k = \rho^j$$

がえられる．仮定より行列式 $D(i\omega)$ は 0 でないから，これは未知数 σ^k について一意的に解ける．こうして，この系の解として

$$\sigma^k = s^k e^{i\beta^k}$$

がえられたとすれば，(13) により系 (11) の解

$$x^k = s^k \cos(\omega t + \beta^k), \qquad k=1, \cdots\cdots, n, \tag{14}$$

が求まる．系 (11) の行列式 $D(p)$ が安定な多項式であれば $D(i\omega) \neq 0$ であり，系 (11) の解はいずれも $t \to +\infty$ のとき 0 に収束する項をのぞいて解 (14) に一致する（§11 の B］を見よ）．したがって多項式 $D(p)$ が安定な場合には，系 (11) の解 (14) は単に特殊解の 1 つであるばかりでなく**定常解**でもある．

例

調和的な外力をうけている調和振動子の方程式

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = r\cos(\omega t + \alpha) \tag{15}$$

を解いてみよう．方程式 (15) のかわりに，これに対応する複素方程式

$$\ddot{z} + \omega_1^2 z = r e^{i(\omega t + \alpha)} \tag{16}$$

を考える．$\omega \neq \omega_1$ の場合には方程式 (16) は $z = \sigma e^{i\omega t}$ の形の解をもち，しかも (8) によって

$$\sigma = \frac{r e^{i\alpha}}{\omega_1^2 - \omega^2}$$

である．けっきょく，方程式 (15) の解は

$$x = \frac{r}{|\omega_1^2 - \omega^2|}\cos(\omega t + \beta) \tag{17}$$

となる．ただし $\omega_1>\omega$ のときは $\beta=\alpha$，また $\omega_1<\omega$ のときは $\beta=\alpha+\pi$．公式 (17) は調和的な外力をうけている振動子の強制振動を記述している．ここでとくに重要なことは共振がおこることである．すなわち強制振動の振幅

$$\frac{r}{|\omega_1^2-\omega^2|}$$

は $|\omega_1-\omega|$ が小さくなるにしたがって増大するということである．またおもしろいことに，振動 (17) の位相 β は $\omega_1>\omega$ の場合には強制外力の位相 α に一致し，$\omega_1<\omega$ の場合にはそれと逆になる．方程式 (15) の一般解はつぎの形に書かれる：

$$x=r_1\cos(\omega_1 t+\alpha_1)+\frac{r}{|\omega_1^2-\omega^2|}\cos(\omega t+\beta).$$

ここに $u=r_1\cos(\omega_1 t+\alpha_1)$ は (15) に対応する同次方程式の解である．この項 u は振動子の固有振動とよばれている．

$\omega_1=\omega$ の場合には公式 (17) は意味がない．この場合，系 (16) の解を

$$z=\rho te^{i\omega t} \quad (\rho \text{ は複素数})$$

の形で求めれば（定理 8 を見よ），§10 の（9）から

$$[(p+i\omega)^2+\omega^2]\rho t=re^{i\alpha}$$

となり，これから

$$\rho=\frac{re^{i\alpha}}{2i\omega}.$$

けっきょく，方程式 (16) の特殊解は（$\omega_1=\omega$ の場合）

$$z=\frac{rte^{i(\omega t+\alpha)}}{2i\omega}=\frac{rte^{i(\omega t+\alpha-\frac{\pi}{2})}}{2\omega}$$

であって，方程式 (15) の解は

$$x=\frac{rt}{2\omega}\cos\left(\omega t+\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{rt}{2\omega}\sin(\omega t+\alpha)$$

になることがわかる．

したがって $\omega=\omega_1$ の場合，振幅 $\dfrac{rt}{2\omega}$ が時間とともに変化して発散するという現象が共振にほかならない．この現象は，実際の装置では《抵抗》があるために観察されない．

§13. 電 気 回 路

常微分方程式の理論は工学の多くの分野に応用されるが，電気工学とくに通信工学への応用はいちじるしい．電気装置のはたらきは，理想化をおこなうことによって，数学的には常微分方程式系によって記述することができる．この場合，装置の各部を流れる電流の強さとか，いろいろな部分の電位差とかが

この微分方程式系の未知関数（独立変数は時刻である）となる．電気装置は常微分方程式の応用の実例を，たとえば力学の問題などよりも，はるかに豊富に提供してくれるのである．このことは，他の工学上の問題からみちびかれた常微分方程式系に対して，多くの場合，これとまったく同じ方程式系によって記述される電気装置を実現できるということからもうかがえるのである．こうして実際につくられた電気装置は，ある程度まで方程式系を解くための手助けをしてくれる．というのは，この装置のはたらきをしらべることはまさに，この方程式系をみたす未知関数の行動をしらべることにほかならないからである．電気装置のはたらきを支配する物理法則はごく簡単で，物理学をほとんど知らない人ですら容易に理解できるものである．ここでは，やや天下り的な形で電気工学の簡単な法則を述べ，微分方程式の応用例としていくつかの電気装置のはたらきを解明する．

電気回路網の素子

電気装置を構成する最も重要な部品として，**抵抗**，**コイル**，**コンデンサ**があげられる．これらはいずれも**2端素子**である．すなわち電気装置をつくるとき，これらは他の部品の端点に接続される2個の接続点をもっている．電気装置の作動中はこの装置の中にある2端素子を通じて電流が流れ，そのときの2端素子の状態は各時刻 t における2つの値によって記述される．この2つの値とは，2端素子 ab の1端 a から他端 b に流れる電流の強さ $I_{ab}(t)$ と，2端 a, b 間の電位差（電圧降下）$U_{ab}(t)$ とである．電流の強さ $I_{ab}(t)$ は正，負いずれの値をもとる．すなわち，電流が a から b に向かって《流れている》ならば $I_{ab}(t)$ は正であり，逆の場合には負である（いわゆる電流の工学的な向きを考える）． 2端 a, b 間の電位差 $U_{ab}(t)$ は，a, b における電位の差 $V_a(t)-V_b(t)$である．したがって時刻 t における2端素子 ab の状態をあらわす2つの値 $I_{ab}(t)$, $U_{ab}(t)$ は，2つの端子 a, b のうちのどれが先にあり，どれが後にあるかに関係する．a, b の順序を交換すれば，明らかに $I_{ab}(t)$, $U_{ab}(t)$ はいずれも符号を変える．すなわち，つぎの関係がある：

$$I_{ba}(t)=-I_{ab}(t), \tag{1}$$

$$U_{ba}(t)=-U_{ab}(t). \tag{2}$$

いかなる2端素子 ab に対しても，時間 t の関数である $I_{ab}(t)$ および $U_{ab}(t)$ は互いに独立ではなく，ある関係によって結ばれている．この関係とは，素子のはたらきを支配する物理法則のことである．つぎに抵抗，コイル，コンデンサに対して，それらのはたらきを支配する物理法則を述べる．

A］ 2端素子 ab が抵抗の場合には，つぎの関係が成り立つ（オーム（Ohm）の法則）：

$$U_{ab}(t)=R_{ab}I_{ab}(t). \tag{3}$$

ここに R_{ab} は**抵抗**とよばれる正の係数であって，2端素子によって一般に異なる値をとるが，個々の素子に対してはつねに一定である．しかも

$$R_{ba}=R_{ab} \tag{4}$$

が成り立つ．

2端素子 ab がコイルの場合には，つぎの関係がある：

$$U_{ab}(t)=L_{ab}\frac{d}{dt}I_{ab}(t). \tag{5}$$

ここに L_{ab} は**インダクタンス**とよばれる正の係数であって，2端素子によって一般に異なる値をとるが，個々の素子に対してはつねに一定である．しかも

$$L_{ba}=L_{ab} \tag{6}$$

が成り立つ．

2端素子 ab がコンデンサの場合には，つぎの関係がある：

$$I_{ab}(t)=C_{ab}\frac{d}{dt}U_{ab}(t). \tag{7}$$

ここに C_{ab} は**容量**とよばれる正の係数であって，2端素子によって一般に異なる値をとるが，個々の素子に対してはつねに一定である．しかも

$$C_{ab}=C_{ba} \tag{8}$$

が成り立つ．関係式（7）を積分すれば，次式がえられる：

$$U_{ab}(t)=U_{ab}(t_0)+\frac{1}{C_{ab}}\int_{t_0}^{t}I_{ab}(t)dt. \tag{9}$$

関数

$$Q_{ab}(t)=C_{ab}U_{ab}(t)$$

は，与えられた時刻 t におけるコンデンサの状態に関係する物理量であって，コンデンサ ab の**蓄電量**とよばれる．関係式（9）はしばしば

$$U_{ab}(t)=\frac{1}{C_{ab}}\int I_{ab}(t)dt$$

と書かれ，$\int I_{ab}(t)dt$ をコンデンサの蓄電量と考える．

関係式（4）は，（1），（2）および（3）からみちびかれる．すなわち

$$R_{ab}I_{ab}(t)=U_{ab}(t)=-U_{ba}(t)=-R_{ba}I_{ba}(t)=R_{ba}(-I_{ba}(t))=R_{ba}I_{ab}(t).$$

同様に関係式（6）および（8）がみちびかれる．

素子のはたらきのうちでとくに重要なのは，2つのコイルの間の**相互誘導現象**である．

B］ インダクタンスがそれぞれ $L_{a_1b_1}=L_1$, $L_{a_2b_2}=L_2$ の2つのコイル a_1b_1, a_2b_2 は相互誘導現象をおこすことがある．この現象は**相互インダクタンス** $M=M_{a_1b_1,a_2b_2}$ によって特徴づけられる．この場合，素子 a_1b_1 における電位差 $U_{a_1b_1}(t)=U_1(t)$ は，電流 $I_{a_1b_1}(t)=I_1(t)$ に関係するばかりでなく，電流 $I_{a_2b_2}(t)=I_2(t)$ にも関係する．この関係はつぎの公式であらわされる：

$$U_1(t)=L_1\frac{d}{dt}I_1(t)+M\frac{d}{dt}I_2(t), \tag{10}$$

$$U_2(t)=L_2\frac{d}{dt}I_2(t)+M\frac{d}{dt}I_1(t). \tag{11}$$

なおこのとき，相互インダクタンス $M_{a_1b_1,a_2b_2}$ に対して，

$$M_{a_1b_1,a_2b_2}=M_{a_2b_2,a_1b_1}=-M_{a_1b_1,b_2a_2}$$

の関係があり，さらにつぎの不等式が成り立つ：

$$M^2\leqq L_1L_2.$$

2つのコイルの間の《相互作用》が強ければ強いほど，相互インダクタンス M の値は $\sqrt{L_1L_2}$ に近くなる．

A］で述べた2端素子はどれもそれ自身では装置の中に電気的な現象を発生させることができないので，**受動素子**とよばれる．装置の中に電流を発生させることのできるものは**能動素子**とよばれ，それには**電圧源**と**電流源**とがある．

C］ 2端素子 ab が電圧源の場合には，つぎの関係がある：

$$U_{ab}(t)=U(t), \tag{12}$$

ここに $U(t)$ は電圧源の特性をあらわす（時間 t の）関数である．関係式 (12) は関数 $I_{ab}(t)$ を含んでいないが，関数 $U_{ab}(t)$ と $I_{ab}(t)$ とを結びつけているものと考えることができる．

電流源 ab に対しても同様に，つぎの関係がある：

$$I_{ab}(t)=I(t),$$

ここに $I(t)$ は電流源を特徴づける（時間 t の）関数である．いちばん多く考察されるのは，関数 $U(t)$ および $I(t)$ が定数の場合か，または

$$r\cos(\omega t+\alpha)$$

という周期関数の場合である．

以上述べたものが，電気装置を構成する最も重要かつ簡単な部品である．装置そのものを電気回路網とよび，装置を構成するこれらの部品を回路素子という．まえに述べた素子のほかに，たとえば**多端素子**もあることを注意しておく．3端素子の例としては3極真空管があげられよう．これについては §29 で研究する．

キルヒホフ（Kirchhoff）の法則

さてここで，電気回路のはたらきを支配するキルヒホフの法則を述べよう．

D］ **回路網**とは有限個の回路素子(上述の 2 端素子はその特別の場合である）からなる系で，その各素子の端子がいわゆる回路の**接続点**において他の素子の端子に結合されているものをいう．したがって，各接続点には回路網のいろいろな素子の 2 つまたはそれ以上の端子が結合されている．**《回路網の任意の 1 つの接続点に流れ込む電流の総和は 0 に等しい》**というのが**キルヒホフの第 1 法則**である．回路網の各接続点 a での電位を $V_a(t)$，接続点 a,b 間の電位差を $U_{ab}(t)$（すなわち接続点 a,b における電位の差：$U_{ab}(t)=V_a(t)-V_b(t)$）とするとき，**《$a,b,c,\cdots\cdots,h,k$ が回路網の接続点の系列であれば，**

$$U_{ab}(t)+U_{bc}(t)+\cdots\cdots+U_{hk}(t)+U_{ka}(t)=0$$

である》というのが**キルヒホフの第 2 法則**である．これはふつう**《回路網中の**

任意の閉回路に沿う電位差の総和は0に等しい〉という形で表現される．(キルヒホフのこれらの法則では，回路素子が2端素子であることを必ずしも仮定していない)．つぎに2端素子からなる回路網を例にとって，キルヒホフの法則をもっと具体的に述べてみよう．

E〕 2端素子からなる回路網をSとし，Sの任意の接続点をa，接続点aに結合されているすべての2端素子を$b_1a, b_2a, \cdots\cdots, b_qa$とする（図 7）．このとき，

$$I_{b_1a}(t)+I_{b_2a}(t)+\cdots\cdots+I_{b_qa}(t)=0$$

が成立するというのがキルヒホフの第1法則である． また，$ab, bc, \cdots\cdots, hk, ka$を$S$の中の2端素子の1つの系列（あとの素子の始端がその前の素子の終端になっている．図 8）とするとき，

$$U_{ab}(t)+U_{bc}(t)+\cdots\cdots+U_{hk}(t)+U_{ka}(t)=0$$

が成立するというのがキルヒホフの第2法則である．2端素子からなる回路網のはたらきを解析するということは，つまりこの回路網の中にある各素子をとおる電流，および電位差を求めることにほかならない．したがって，回路網がn個の2端素子からなる場合には，$2n$個の（時間の）関数を求めることが問題になる．ところが個々の2端素子のはたらきを支配する法則は未知関数間の1つの関係式を与えるから，$2n$個の未知関数に対してn個の関係式はただちにえられる．残りのn個の関係式を与えてくれるのがキルヒホフの法則である．じつは互いに独立なちょうどn個の関係式がキルヒホフの法則からえられることが証明されるが，ここではその証明はしない．こうして$2n$個の未知関数に対して$2n$個の方程式がえられる．これらの方程

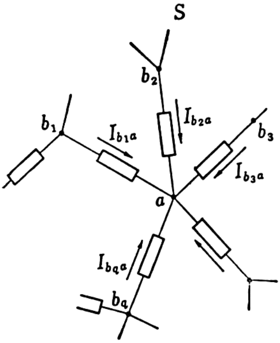


図 7

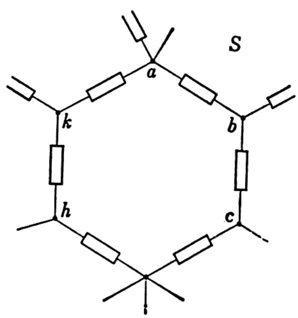


図 8

式のうちのあるものは微分方程式であり，あるものは代数方程式である．キルヒホフの法則は代数方程式を与えるが，これらは未知関数の一部を消去するのに利用されるのである．通常つぎの2とおりの方法のうちの1つがもちいられる．第1の方法は，電流を基本の未知関数とみなして，これらによって電位差をあらわすのである．この場合には，はじめにキルヒホフの第1法則を利用する．すなわち，各素子を流れる電流を（この法則を使って）互いに独立な最小個数の電流の関数としてあらわすのである．これらの独立な電流を**網目電流**という．こうしてつぎにキルヒホフの第2法則において，その中の電位差をそれぞれ対応する電流によってあらわすことにする．このやりかたを網目電流の方法という．第2の方法は，2端素子における電位差を基本の未知関数とみなし，電流を（各2端素子のはたらきを支配する法則を使って）電位差によってあらわすのである．この場合には，キルヒホフの第2法則を使って，各素子における電位差を互いに独立な最小個数の電位差の関数としてあらわす必要がある．独立な電位差を**結び目電圧**という．こうしてから，キルヒホフの第1法則にあらわれる電流をそれぞれ対応する電位差でおきかえるのである．このやりかたを結び目電圧の方法という．

2端素子のインピーダンス

電気回路網の計算例の考察にうつるまえに，2端素子のはたらきを支配する法則（3），（5），（9），(10)，(11) を記号的に表現してみよう．

F］ 2端素子 ab を抵抗，コイル，またはコンデンサのいずれかとし，簡単に

$$U_{ab}(t)=U(t),\quad I_{ab}(t)=I(t),$$

$$R_{ab}=R,\quad L_{ab}=L,\quad C_{ab}=C$$

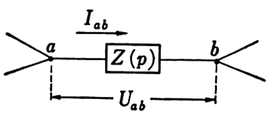


図 9

とおく．すでに使用した演算子記号 p（§7 の **A**］を見よ）のほかに，さらに自然な記号 $\frac{1}{p}f(t)=\int f(\tau)d\tau$ を導入すれば，関係式（3），（5），（9）はただ1つの公式：

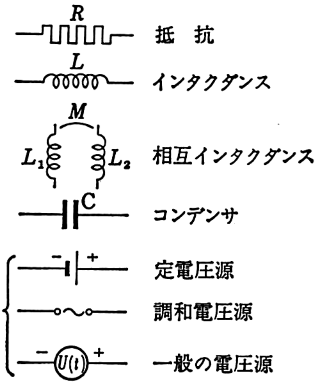
$$U(t)=Z(p)I(t) \tag{13}$$

によって書きあらわすことができる（図 9）．ただし（3），（5），（9）

のそれぞれの場合に応じて， $Z(p)=R$， $Z(p)=Lp$， $Z(p)=\dfrac{1}{Cp}$ である．関数 $Z(p)$ を2端素子 ab の**インピーダンス**という．コンデンサに対しては， $Z(p)$ は p の多項式ではなく有理関数 $\dfrac{1}{Cp}$ である．すなわち

$$U(t)=\frac{1}{Cp}I(t). \tag{14}$$

関係 (14) に Cp をかければ， $I(t)=CpU(t)$ がえられる．



回路素子の記号

図 10

いま，

$$G(p)=\frac{1}{Z(p)}$$

とおけば，関係式 (13) はつぎの形になる：

$$I(t)=G(p)U(t).$$

関数 $G(p)$ を2端素子 ab の**アドミッタンス**という．(3)，(5)，(9) のそれぞれの場合に応じて，

$$G(p)=\frac{1}{R},\quad G(p)=\frac{1}{Lp},\quad G(p)=Cp$$

である．関係式 (10)，(11) を演算子記号をもちいてあらわせば，

$$U_1(t)=L_1pI_1(t)+MpI_2(t),$$
$$U_2(t)=L_2pI_2(t)+MpI_1(t)$$

となる．

実例の考察にうつることにしよう．はっきりと視覚に訴えるため，回路網を図であらわすことが多い．このとき，接続点には点を，2端素子にはその端子間に図 10 の対応する記号をえがくことにする．

例

1. 振動閉回路 4個の接続点 a, b, c, d と4個の2端素子 ab, bc, cd, da とからなる電気回路を S とする(図 11)．素子 ab はインダクタンス L のコイル，素子 bc は抵抗 R，素子 cd は容量 C のコンデンサ，最後に素子 ad は電圧源であって $U_{ad}(t)=U(t)$

とする．回路の解析に網目電流の方法を利用してみよう．接続点 b にキルヒホフの第1法則を適用すれば，$I_{ab}(t)+I_{cb}(t)=0$ すなわち $I_{ab}(t)=I_{bc}(t)$ がえられる．このような関係は1個の接続点にちょうど2個の2端素子が結合されている場合つねに成り立つ．こうして，つぎの関係をうる：

$$I_{ab}(t)=I_{bc}(t)=I_{cd}(t)=I_{da}(t)=I(t).$$

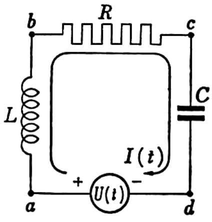


図　11

ここに $I(t)$ は網目電流である．さらに各2端素子に対し，それらのはたらきを支配する法則を書けばつぎのようになる：

$$\left.\begin{aligned} U_{ab}(t)=LpI(t),\quad U_{bc}(t)=RI(t),\\ U_{cd}(t)=\frac{1}{Cp}I(t),\quad U_{da}(t)=-U(t). \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

キルヒホフの第2法則によって，つぎの関係がえられる：

$$U_{ab}(t)+U_{bc}(t)+U_{cd}(t)+U_{da}(t)=0. \tag{16}$$

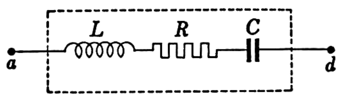
関係式 (15) と (16) とから，

$$\left(Lp+R+\frac{1}{Cp}\right)I(t)=U(t). \tag{17}$$

この式の両辺に p をかけると(すなわち各項を微分すれば)，次式がえられる：

$$\left(Lp^2+Rp+\frac{1}{C}\right)I(t)=pU(t). \tag{18}$$

これが，いま考えている回路網の微分方程式である．もしこの回路網から素子 ad をとりのぞいてしまうと，3個の受動素子 ab, bc, cd からなるいわゆる開いた回路がえられる．この回路は一括して，端子 a, d をもった1個の2端素子とみなすことができる (図12)．このような素子に対しては，そのはたらきを支配する法則は関係式 (13) に似た関係式 (17) によって与えられる．この場合，関数 $Z(p)=Lp+R+\dfrac{1}{Cp}$ がインピーダンスであり，$G(p)=\dfrac{Cp}{LCp^2+RCp+1}$ がアドミッタンスである．



$$Z(p)=Lp+R+\frac{1}{Cp}$$

図　12

$U(t)=0$ の場合は，回路網に能動性の素子 ad が存在しないことと同じで，回路は3個の受動素子 ab, bc, cd からなり，接続点 a と d とは一致する (図 13)．この受動的な回路網 S^* のはたらきを記述する方程式は

$$\left(Lp^2+Rp+\frac{1}{C}\right)I(t)=0 \tag{19}$$

となる．まえにすでに注意したとおり，受動的な回路網はそれ自身では電気的現象を発生させることはできない．こ

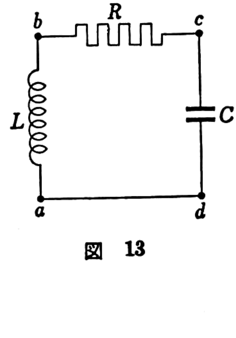


図　13

のことは，方程式 (19) が特殊解 $I(t)\equiv 0$ をもつことによって裏づけられる．しかし回路 S^* の中にすでに電流が存在するものと考えてそのはたらきを考察し，この電流が時間の経過とともにどのように変化するかを解明することもできる．多項式

$$Lp^2+Rp+\frac{1}{C} \tag{20}$$

の根を λ_1, λ_2 とする．L, R, C は正の数であるから（A］を見よ），根 λ_1 と λ_2 の実部は負である．ゆえに回路 S^* 中の電気現象は時間がたつにつれて消滅する（§9 の A］を見よ）．しかし，この消滅の過程はいろいろな形をとりうる．すなわち，もし λ_1 と λ_2 とが虚根であれば，方程式 (19) の 0 でないどんな解も振動的性格をもつ(§7 の例3を見よ)．またもし λ_1 と λ_2 とが実根であれば，この消滅過程は非振動的である．つまり，方程式 (19) のどんな解もある時刻からは単調になる．根 λ_1 と λ_2 とが実根となるか虚根となるかは，数

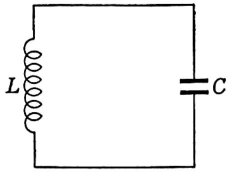


図　14

$$\varDelta=\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}$$

の符号によって判明する．けっきょく，$\varDelta<0$ の場合には方程式 (19) の解は振動的であり，また $\varDelta>0$ の場合には解は非振動的である．

とくにおもしろいのは，振動閉回路 S^* の中に抵抗 R がまったく存在しない場合である．このときには，回路は 2 個の受動素子 ab と cd とからなり，$b=c$，$a=d$ となる（図 14）．この場合の回路の方程式は，つぎのようになる：

$$\left(p^2+\frac{1}{LC}\right)I(t)=0.$$

この方程式の一般解は

$$I(t)=s\cos(\omega_1 t+\beta_1) \qquad \left(\omega_1=\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)$$

である．したがって，受動的な振動閉回路が抵抗をまったくもたない場合には，その中に振動数

$$\omega_1=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

の消滅しない振動がおこる．値 $\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ を一般の振動閉回路 S の**固有振動数**という．

ここでふたたび振動閉回路 S にもどって，電圧源 $U(t)$ が調和関数の場合を考察しよう．

多項式 (20) の根は負の実部をもつから，回路 S の中に定常過程を見ることができる．解を複素振幅の方法（§12 を見よ）によって求めてみよう．$U(t)=re^{i\omega t}$ を実振幅 $r>0$ の複素調和振動とする．このとき，方程式 (18) の右辺は

$$pU(t)=p(re^{i\omega t})=ir\omega e^{i\omega t}$$

となる．したがって，(18) の解を

$$I_{\text{stat.}}(t)=\sigma e^{i\omega t}$$

とすれば，この複素振幅σは次式によって与えられる（§12 の A］を見よ）：

$$\sigma=\frac{ir\omega}{iR\omega+\left(-L\omega^2+\frac{1}{C}\right)}=\frac{r}{R+i\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)}.$$

これから，実振幅：

$$s=|\sigma|=\frac{r}{\sqrt{R^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

がえられる．この式からわかるように，電圧源の振幅がrの場合，電流の振幅sは電圧源の振動数ωが閉回路Sの固有振動数 $\omega_1=\frac{1}{\sqrt{LC}}$に等しいときに最大になり，そのとき$s$と$r$との関係は $s=\frac{r}{R}$ となる．すなわちこの場合，閉回路はあたかも抵抗だけを含むような行動をしめすのである．その他の振動数に対しては，電流の振幅sは$\frac{r}{R}$よりも小さい値をとる．この現象を共振という（§12 の例とくらべてみよ）．L-R-C 振動閉回路Sは電圧源の振動数がSの固有振動数$\frac{1}{\sqrt{LC}}$に等しいときに共振をおこすわけである．

2. 変 圧 器 変圧器は同一の鉄心に巻かれた1次コイルと2次コイルとからなり，1次コイルには変化電圧源が連結され，2次コイルにはたとえば外部抵抗などの負荷が連結される．いずれのコイルも(自己)インダクタンスと(内部)抵抗とをもち，また2つのコイルの間には相互誘導作用がある．したがって変圧器は，相互誘導作用によって結ばれている2つの別個の閉回路からなる電気回路網と考えられる．第一の閉回路は3個の2端素子からなる：a_1b_1 はインダクタンス L_1 のコイル，b_1c_1 は抵抗 R_1 の内部抵抗，a_1c_1 は電圧源 $U_{a_1c_1}(t)=U(t)$ である．第二の閉回路も同じく3個の2端素子からなる：a_2b_2 はインダクタンス L_2 のコイル，b_2c_2 は抵抗 R_2 の内部抵抗，c_2a_2 は抵抗Rの負荷である．その上さらに，相互インダクタンス $M_{a_1b_1,a_2b_2}=M$ がある（図 15）．キルヒホフの第1法則によって

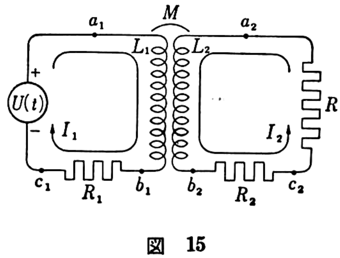


図 15

$$I_{a_1b_1}=I_{b_1c_1}=I_{c_1a_1}=I_1,\quad I_{a_2b_2}=I_{b_2c_2}=I_{c_2a_2}=I_2$$

となり，2つの網目電流 I_1, I_2 がえられる．またキルヒホフの第2法則によって，次式がえられる：

$$L_1pI_1+MpI_2+R_1I_1-U(t)=0,$$
$$L_2pI_2+MpI_1+R_2I_2+RI_2=0.$$

すなわち

$$(L_1p+R_1)I_1+MpI_2=U(t),$$
$$MpI_1+(L_2p+R_2+R)I_2=0.$$

この系の行列式は

$$D(p)=(L_1L_2-M^2)p^2+(L_1R_2+L_1R+L_2R_1)p+R_1(R_2+R)$$

となり，§9 の B］によって，この多項式は安定である($L_1L_2-M^2>0$ だから)．つぎに電圧 $U(t)$ が調和的な場合について変圧器のはたらきをしらべ，その定常解を §12 の B］の方法によって求めてみよう．

$$U(t)=u_1e^{i\omega t}$$

とする．ただし u_1 は正の実数である（1次コイルに加えられる電圧の振幅）．未知関数 I_1, I_2 を

$$I_1=\sigma_1e^{i\omega t},\quad I_2=\sigma_2e^{i\omega t}$$

の形で求めることにする．ここに σ_1, σ_2 は電流の複素振幅である．理論的にとくに興味のあるのは，R_1, R_2 および $L_1L_2-M^2$ が微小であるような**理想的な変圧器**である．この場合，方程式においてこれらの値を無視してしまえば，σ_1, σ_2 に対して次式がえられる：

$$L_1\cdot i\omega\sigma_1+M\cdot i\omega\sigma_2=u_1,$$
$$M\cdot i\omega\sigma_1+(L_2\cdot i\omega+R)\sigma_2=0.$$

$M\approx\sqrt{L_1L_2}$ であるから，第1式に $\sqrt{\dfrac{L_2}{L_1}}$ をかけて，第2式から引けば

$$R\sigma_2=-\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}u_1.$$

けっきょく，負荷 R における電位差の振幅 $u_2=R|\sigma_2|$ は

$$u_2=\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}u_1$$

に等しいことがわかる．値 $\sqrt{\dfrac{L_2}{L_1}}$ は**変圧係数**とよばれる．したがって，$L_2>L_1$ の場合には

$$\frac{u_2}{u_1}>1$$

となって電圧を上げる変圧器がえられ，また $L_2<L_1$ の場合には，

$$\frac{u_2}{u_1}<1$$

となって電圧を下げる変圧器がえられる．

3. ろ 波 器　4個の接続点とつぎのような5個の2端素子とからなる回路網を考えよう（図 16)．

ab——インダクタンス L のコイル，
bc——インダクタンス L のコイル，
bd——容量 C のコンデンサ，
ad——$U_{ad}(t)=U(t)$ の電圧源，
cd——抵抗 R の負荷．

$$I_{ab}=I_1,\qquad I_{bc}=I_2$$

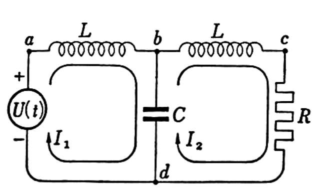


図　16

とおくと，キルヒホフの第１法則から

$$I_{bd}=I_1-I_2,\quad I_{cd}=I_2.$$

またキルヒホフの第２法則によって次式がえられる：

$$U_{ab}+U_{bc}+U_{cd}+U_{da}=0,$$
$$U_{bc}+U_{cd}+U_{db}=0.$$

すなわち

$$LpI_1+LpI_2+RI_2-U(t)=0,$$
$$LpI_2+RI_2+\frac{1}{Cp}(I_2-I_1)=0.$$

この最後の式に p をかけると，つぎのような系がえられる：

$$LpI_1+(Lp+R)I_2=U(t),$$
$$-\frac{1}{C}I_1+\left(Lp^2+Rp+\frac{1}{C}\right)I_2=0.$$

この系の行列式は

$$D(p)=L^2p^3+LRp^2+\frac{2Lp}{C}+\frac{R}{C}$$

となり，定理６によって多項式 $D(p)$ は安定である．$U(t)=be^{i\omega t}$（b は電圧の実振幅）の場合には，すでに述べた方法にしたがって（§12 を見よ），未知関数 I_1, I_2 を

$$I_1=a_1e^{i\omega t},\quad I_2=a_2e^{i\omega t}$$

（a_1, a_2 は電流の複素振幅）の形で求めればよい．つぎに負荷の電位差 $U_{cd}=RI_2$ について考えてみよう．

$$a_2=\frac{\dfrac{b}{C}}{\left(\dfrac{R}{C}-LR\omega^2\right)+i\omega\left(\dfrac{2L}{C}-L^2\omega^2\right)}$$

であるから，電圧 U_{cd} の振幅 $a=|a_2|R$ がつぎのように求まる：

$$a=|a_2|R=\frac{\dfrac{bR}{C}}{\sqrt{\left(\dfrac{R}{C}-LR\omega^2\right)^2+\omega^2\left(\dfrac{2L}{C}-L^2\omega^2\right)^2}}.$$

振動数 ω が小さければ $\dfrac{a}{b}\approx 1$ となる．いいかえれば，小さな振動数の電圧は振幅をほとんど変えることなく，容易にフィルタを通過する．しかし振動数が大きい場合には

$$\frac{a}{b}\approx\frac{R}{CL^2\omega^3}$$

となるから，大きい振動数の電圧はフィルタをほとんど通過せず，《こされて》しまうのである．

§14.　正規形の定係数線形同次方程式系

ここでは定係数の方程式系

$$\dot{x}^i=\sum_{j=1}^{n} a^i_j x^j, \quad i=1, \cdots\cdots, n, \tag{1}$$

を解く．この系は消去法（§11，とくに §11 の例2を見よ）によって解くこともできるが，ここでは行列 $A=(a^i_j)$ をジョルダン（Jordan）標準形に変換する方法によって解くことにする．行列 A が互いに異なる n 個の固有値をもてば，これをジョルダン標準形——この場合には対角線型——にすることは，ごく初等的な代数的な問題である．しかし任意の行列 A をジョルダン標準形に変換することは，線形代数のかなり複雑な問題である．この§の結果であとで使用されるものは，n 個の互いに異なる固有値をもつ行列 A を対角線型に変換することに関係のあることがらだけである．任意の行列 A をジョルダン標準形に変換することによってえられる結果（**C**]，**D**]，**G**]）はあとで応用されることがないから，これらをとばして読んでもあとの理解にはさしつかえない

方程式系（1）を解くために行列 A をジョルダン標準形に変換する場合，ふつう未知関数 $x^1, \cdots\cdots, x^n$ の1次変換が利用される．この方法はこの§の最後に《変数変換》という標題で述べてある．もう1つの方法——本質的にはやはり行列 A をジョルダン標準形に変換することを利用する——は，この§の前半で述べる．

この§では空間の基底を変更しないから，行列 A とこれに対応するベクトル空間の変換 $\boldsymbol{A}$ とを区別しないことにする．ただし **F**」の証明の場合だけは例外である．

特性多項式が単根をもつ場合

A」 微分方程式系（1）はベクトルの記法によって，つぎの形に書かれる：

$$\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}. \tag{2}$$

ここに $A=(a^i_j)$，また未知関数系 $x^1, \cdots\cdots, x^n$ のかわりに未知ベクトル

$$\boldsymbol{x}=(x^1, \cdots\cdots, x^n)$$

を導入してある．ただしベクトル $\boldsymbol{x}$ の導関数 $\dot{\boldsymbol{x}}$ とは，ベクトル $\dot{\boldsymbol{x}}=(\dot{x}^1, \cdots\cdots,$

x^n) のことである. $\boldsymbol{h}$ を行列 A の固有値 λ に対応する固有ベクトルとするとき (§ 34 の B] を見よ), すなわち

$$A\boldsymbol{h}=\lambda\boldsymbol{h}$$

が成り立つとき, 次式

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{h}e^{\lambda t}$$

によって定義されるベクトル関数 $\boldsymbol{x}$ は方程式 (2) の解になる. これは (2) に $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{h}e^{\lambda t}$ を代入することによってたしかめられる.

定理 10. 『微分方程式系

$$\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x} \tag{3}$$

において, 行列 A の固有値 $\lambda_1, \cdots\cdots, \lambda_n$ がすべて異なると仮定し, それらに対応する固有ベクトルを

$$\boldsymbol{h}_1, \cdots\cdots, \boldsymbol{h}_n$$

とする. このとき

$$\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{h}_i e^{\lambda_i t}, \qquad i=1, \cdots\cdots, n, \tag{4}$$

とおけば, 任意の定数 $c^1, \cdots\cdots, c^n$ に対して, ベクトル関数

$$\boldsymbol{x}=c^1\boldsymbol{x}_1+\cdots\cdots+c^n\boldsymbol{x}_n \tag{5}$$

は方程式 (3) の解であり, かつ (3) の任意の解は (5) によって与えられる』

証明 A] によって各関数 $\boldsymbol{x}_i$ は方程式 (3) の解であるから, §6 の A] より (5) はつねに方程式 (3) の解である. つぎに方程式 (3) の任意の解は (5) の形に書けることを証明しよう. $\varphi(t)$ を (3) の任意の解とする. 定理 3 によって解 $\varphi(t)$ は数直線 $-\infty<t<+\infty$ 全体で存在すると考えてよい. したがって, この解はとくに $t=0$ においても定義されている. いま $\varphi(0)=\boldsymbol{x}_0$ とおく. ベクトル $\boldsymbol{x}_0$ は基底ベクトル $\boldsymbol{h}_1, \cdots\cdots, \boldsymbol{h}_n$ によって,

$$\boldsymbol{x}_0=c^1\boldsymbol{h}_1+\cdots\cdots+c^n\boldsymbol{h}_n$$

とあらわされる (§ 34 の C] によってベクトル $\boldsymbol{h}_1, \cdots\cdots, \boldsymbol{h}_n$ は基底をなすから). これらの $c^1, \cdots\cdots, c^n$ を (5) の係数にしてえられる解 $\boldsymbol{x}$ は, 明らかに初期条件

$$\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$$

をみたす．解 $\varphi(t)$ も同じ初期条件 $\varphi(0)=\boldsymbol{x}_0$ をみたしているから一意性の定理（定理 2 を見よ）によって $\boldsymbol{x}=\varphi(t)$ となる．これで定理 10 が証明された．

方程式（3）の行列 $A=(a^i_j)$ が実の場合には，解（5）から実解をえらび出すことが問題になる．

B] 方程式（3）の行列 $A=(a^i_j)$ が実であると仮定し，その実固有値には実固有ベクトルが，また互いに複素共役な固有値には互いに複素共役な固有ベクトルが対応するように，固有ベクトル $\boldsymbol{h}_1, \cdots\cdots, \boldsymbol{h}_n$ をえらぶことにする．このとき，解の系（4）において各実固有値には実解が，また互いに複素共役な固有値には互いに複素共役な解が対応する．解（5）が実解となるのは，実固有値に対応する解の係数は実であり，互いに複素共役な固有値に対応する解の係数は互いに複素共役の場合であり，かつこの場合にかぎる．

これは §7 の **D]** からすぐにわかることである．

一般の場合

こんどは一般の場合（行列 (a^i_j) の固有値が重複する場合）に方程式（1）を解くことにしよう．それには，行列をジョルダン標準形に変換するためのかなり複雑でしかも証明に手数のかかる代数的な定理をもちいる（§ 36 を見よ）．

C] 方程式系（1）をベクトルの記法によって

$$\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x} \tag{6}$$

と書く．行列 A の固有値 λ に対応する 1 つの特性系列（§ 36 の **A]** を見よ）を

$$\boldsymbol{h}_1, \cdots\cdots, \boldsymbol{h}_k$$

とする．すなわち $\boldsymbol{h}_1, \cdots\cdots, \boldsymbol{h}_k$ はつぎの関係をみたすベクトルである：

$$A\boldsymbol{h}_1=\lambda\boldsymbol{h}_1,\quad A\boldsymbol{h}_2=\lambda\boldsymbol{h}_2+\boldsymbol{h}_1, \cdots\cdots,\quad A\boldsymbol{h}_k=\lambda\boldsymbol{h}_k+\boldsymbol{h}_{k-1}.$$

ここで k 個のベクトル関数をつぎのように定義する：

$$\boldsymbol{\omega}_r(t)=\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\boldsymbol{h}_1+\frac{t^{r-2}}{(r-2)!}\boldsymbol{h}_2+\cdots\cdots+\boldsymbol{h}_r,\quad r=1, \cdots\cdots, k. \tag{7}$$

このとき，ベクトル関数

$$\boldsymbol{x}_r=\boldsymbol{\omega}_r(t)e^{\lambda t},\qquad r=1, \cdots\cdots, k, \tag{8}$$

は方程式（6）の解であって，

$$\boldsymbol{x}_r(0)=\boldsymbol{h}_r \tag{9}$$

をみたす．こうして k 個のベクトルからなる特性系列には k 個の解が対応する．

ベクトル関数（8）が方程式（6）の解であることを証明するため，ベクトル関数（7）に対してつぎの2つの恒等式が成り立つことに注意しよう：

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_r(t)=\boldsymbol{\omega}_{r-1}(t),\qquad r=1,\cdots\cdots,k,$$

$$A\boldsymbol{\omega}_r(t)=\lambda\boldsymbol{\omega}_r(t)+\boldsymbol{\omega}_{r-1}(t),\qquad r=1,\cdots\cdots,k.$$

ただし $\boldsymbol{\omega}_0(t)=0$ とする．この2つの等式はいずれも簡単な計算によってすぐにたしかめられる．これらの恒等式をもちいれば，関数（8）が方程式（6）の解であることがただちにわかる．実際，

$$\dot{\boldsymbol{x}}_r(t)=\dot{\boldsymbol{\omega}}_r(t)e^{\lambda t}+\lambda\boldsymbol{\omega}_r(t)e^{\lambda t}=(\boldsymbol{\omega}_{r-1}(t)+\lambda\boldsymbol{\omega}_r(t))e^{\lambda t}=A\boldsymbol{\omega}_r(t)e^{\lambda t}=A\boldsymbol{x}_r(t).$$

さて，一般の方程式系（1）の解を与えるつぎの定理を証明しよう．

定理 11. 『方程式系（1）をベクトルの記法によって

$$\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x} \tag{10}$$

と書こう．定理 30（§36 を見よ）によれば，行列 A のすべての固有値に対応する特性系列からなる基底：

$$\boldsymbol{h}_1,\cdots\cdots,\boldsymbol{h}_n$$

が存在する．議論を明確にするため，$\boldsymbol{h}_1,\cdots\cdots,\boldsymbol{h}_{k_1}$ は固有値 λ_1 に対応する特性系列，$\boldsymbol{h}_{k_1+1},\cdots\cdots,\boldsymbol{h}_{k_1+k_2}$ は固有値 λ_2 に対応する特性系列，……，とする．C］によって各特性系列にはいくつかの解が対応する．これらの解を実際に書きあらわすとつぎのようになる：

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{h}_1e^{\lambda_1 t},\cdots\cdots,\boldsymbol{x}_{k_1}=\left(\frac{t^{k_1-1}}{(k_1-1)!}\boldsymbol{h}_1+\cdots\cdots+\boldsymbol{h}_{k_1}\right)e^{\lambda_1 t},\\
&\boldsymbol{x}_{k_1+1}=\boldsymbol{h}_{k_1+1}e^{\lambda_2 t},\cdots\cdots,\boldsymbol{x}_{k_1+k_2}=\left(\frac{t^{k_2-1}}{(k_2-1)!}\boldsymbol{h}_{k_1+1}+\cdots\cdots+\boldsymbol{h}_{k_1+k_2}\right)e^{\lambda_2 t},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

このとき，任意の定数 $c^1,\cdots\cdots,c^n$ に対して，

$$\boldsymbol{x}=c^1\boldsymbol{x}_1+\cdots\cdots+c^n\boldsymbol{x}_n \tag{12}$$

は方程式（10）の解であり，逆に方程式（10）の任意の解は（12）の形に書きあらわすことができる』

証明　関数 $\boldsymbol{x}_1, \cdots\cdots, \boldsymbol{x}_n$ は方程式 (10) の解であるから (**C**] を見よ), §6 の **A**] によって, (12) はつねに方程式 (10) の解である. 逆に, 方程式 (10) の任意の解は適当に定数 $c^1, \cdots\cdots, c^n$ をえらべば (12) の形に書きあらわされることを証明しよう. $\boldsymbol{\varphi}(t)$ を方程式 (10) の任意の解とする. 定理3により, 解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ は数直線 $-\infty < t < +\infty$ 全体で存在すると考えてよいから, ベクトル $\boldsymbol{\varphi}(0) = \boldsymbol{x}_0$ がきまる. このベクトル $\boldsymbol{x}_0$ が基底 $\boldsymbol{h}_1, \cdots\cdots, \boldsymbol{h}_n$ によって

$$\boldsymbol{x}_0 = c^1\boldsymbol{h}_1 + \cdots\cdots + c^n\boldsymbol{h}_n$$

とあらわされたとする. この $c^1, \cdots\cdots, c^n$ を (12) に代入すれば, 初期条件

$$\boldsymbol{x}(0) = c^1\boldsymbol{x}_1(0) + \cdots\cdots + c^n\boldsymbol{x}_n(0) = c^1\boldsymbol{h}_1 + \cdots\cdots + c^n\boldsymbol{h}_n = \boldsymbol{x}_0$$

をみたす解 $\boldsymbol{x}(t)$ がえられる. 解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ と $\boldsymbol{x}(t)$ とは同じ初期値をもつから一致する. これで定理 11 が証明された.

残るのは, 行列 (a^i_j) が実の場合に (12) によって与えられる解の中から実解をえらび出すことである. これは特性多項式が単根をもつ場合とまったく同様におこなわれる.

D]　方程式 (10) の行列 $A = (a^i_j)$ が実であると仮定しよう. このとき定理 30 (§36) と同様な方法で基底 $\boldsymbol{h}_1, \cdots\cdots, \boldsymbol{h}_n$ をえらぶ. このように基底をとれば, 定理 11 で構成した解 (11) の中にはいくつかの実解と, 互いに複素共役ないく組かの解とが存在することになる. そのとき解 (12) が実解となるのは, 実解の係数は実であり, 互いに複素共役な解の係数は互いに複素共役な場合であり, かつこの場合にかぎる.

この事実 **D**] は §7 の **D**] からすぐにみちびかれる.

最後に注意すべきことは, この§で述べた諸結果は §7, 8 の結果に密接に関連しているということである. §7, 8 では定係数の単独の n 階同次方程式を考察したが, その方程式は §4 の方法で n 個の方程式からなる正規系に書きあらわすことができる. したがって §7, 8 の結果は, この§の結果からもみちびくことができるはずである. なおその際, 正規系からえられる特性多項式は, はじめの方程式の特性多項式と一致することがわかる.

変数変換

E]　定数行列 $A=(a^i_j)$ を係数とする方程式系（1）において，未知関数

$$x^1, \cdots\cdots, x^n \tag{13}$$

のかわりに，

$$y^j=\sum_{i=1}^{n} s^j_i x^i, \qquad j=1, \cdots\cdots, n, \tag{14}$$

とおいて，あたらしい未知関数

$$y^1, \cdots\cdots, y^n \tag{15}$$

を定義しよう．ここに s^j_i は定数かつ行列 $S=(s^j_i)$ は退化しない*) ものとする．あたらしい未知関数に関する方程式系を

$$\dot{y}^i=\sum_{j=1}^{n} b^i_j y^j, \qquad i=1, \cdots\cdots, n, \tag{16}$$

とすれば，行列 $B=(b^i_j)$ は次式によって行列 A からえられる：

$$B=SAS^{-1}. \tag{17}$$

これを証明しよう．関係式 (14) を t について微分すれば，

$$\dot{y}^j=\sum_{i=1}^{n} s^j_i \dot{x}^i, \qquad j=1, \cdots\cdots, n. \tag{18}$$

したがってベクトル $\dot{\boldsymbol{x}}=(\dot{x}^1, \cdots\cdots, \dot{x}^n)$ の成分は，ベクトル $\boldsymbol{x}=(x^1, \cdots\cdots, x^n)$ の成分と同じ変換をうける．これから (17) がえられる．なぜなら，関係式 (14) と (18) とは行列をもちいて

$$\boldsymbol{y}=S\boldsymbol{x}, \qquad \dot{\boldsymbol{y}}=S\dot{\boldsymbol{x}}$$

と書きかえられ，これから

$$\dot{\boldsymbol{y}}=S\dot{\boldsymbol{x}}=SA\boldsymbol{x}=SA\cdot S^{-1}\boldsymbol{y}$$

となるからである．これで (17) が証明された．

行列 S を適当にとれば，行列 B を簡単な形にすることができる．行列 A を行列 B にうつす変換式 (17) は，行列 S による行列 A の相似変形であるから，行列 B をジョルダン標準形にすることができる（§ 36 の **B]** を見よ）．

F]　行列 A の固有値

---

*) 訳注：S の行列式 $|s_j^i| \neq 0$ となることをいう．

$$\lambda_1, \cdots\cdots, \lambda_n$$

がすべて互いに異なる場合には，1次変換 (14) を適当にとって，方程式系 (16) をつぎの形にすることができる：

$$\dot{y}^k=\lambda_k y^k, \quad k=1, \cdots\cdots, n. \tag{19}$$

とくに行列 A が実であれば，系列 $\lambda_1, \cdots\cdots, \lambda_n$ の中には各複素固有値 λ_k とともに，それに複素共役な固有値 $\lambda_l=\overline{\lambda}_k$ が存在する．そのとき変数 (13) が実ならば，変換 (14) をさらにつぎのようにえらぶことができる：(19) において各実固有値 λ_j には実変数 y^j が対応し，また互いに複素共役な固有値の組 λ_k, λ_l には互いに複素共役な変数 y^k，$y^l=\overline{y}^k$ が対応する．このようにして，互いに共役な複素固有値 λ_k，$\overline{\lambda}_k$ には互いに共役な方程式

$$\dot{y}^k=\lambda_k y^k, \quad \dot{\overline{y}}^k=\overline{\lambda}_k\overline{y}^k \tag{20}$$

が対応する．ここで λ_k，y^k をそれぞれ

$$\lambda_k=\mu_k+i\nu_k, \quad y^k=\xi^k+i\eta^k \tag{21}$$

(μ_k, ν_k, ξ^k, η^k は実である)とおけば，互いに共役な一組の方程式 (20) を一組の実方程式：

$$\dot{\xi}^k=\mu_k\xi^k-\nu_k\eta^k, \quad \dot{\eta}^k=\nu_k\xi^k+\mu_k\eta^k, \tag{22}$$

でおきかえることができる．このようなおきかえを互いに複素共役な固有値の各組に対しておこなえば，実変数系 (13) をあたらしい実変数系でおきかえることができ，しかもこの系に関する方程式系の一部は (19) の形になり（実固有値 λ_j に対し)，また一部は (22) の形になる（互いに複素共役な固有値の各組に対し).

F] を証明するため，ベクトル $\boldsymbol{x}=(x^1, \cdots\cdots, x^n)$ のつくる空間 R で行列 A に対応する1次変換 $\boldsymbol{A}$ (§34 を見よ) を考え，変換 $\boldsymbol{A}$ の固有値 λ_k に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{h}_k$ であらわす．空間 R の基底として，ベクトル

$$\boldsymbol{h}_1, \cdots\cdots, \boldsymbol{h}_n \tag{23}$$

をとり，この基底に関するベクトル $\boldsymbol{x}$ の座標を $y^1, \cdots\cdots, y^n$ とする．こうすることによって，1次変換 (14) が定まる．このあたらしい座標系では変換 $\boldsymbol{A}$ に対応する行列は B であり，それは容易にわかるように対角型であって，対

角線上に数 $\lambda_1, \cdots\cdots, \lambda_n$ がならぶ．ゆえにけっきょく，系 (16) は (19) の形になる．

つぎに行列 A が実の場合には，各実固有値には実固有ベクトル $\boldsymbol{h}_j$ を，また互いに複素共役な固有値の組 λ_k, $\lambda_l=\bar{\lambda}_k$ には互いに複素共役な固有ベクトルの組 $\boldsymbol{h}_k$, $\boldsymbol{h}_l=\bar{\boldsymbol{h}}_k$ を対応させることにする．任意のベクトルはあたらしい座標系において，

$$\boldsymbol{x}=\sum_{j=1}^{n} y^j \boldsymbol{h}_j \tag{24}$$

の形に書かれ，これがもし実ベクトルであれば，実固有値に対応する実ベクトルの係数は実であり，複素共役な固有値に対応する固有ベクトルの係数は互いに複素共役でなければならない(§7 の **D**]を見よ)．したがって，各実固有値 λ_j には実変数 y^j が対応し，また互いに複素共役な固有値 λ_k, $\lambda_l=\bar{\lambda}_k$ には互いに共役な複素変数 y^k, $y^l=\bar{y}^k$ が対応する．

複素共役な方程式系 (20) から実方程式系 (22) をうるため，方程式 (20) に (21) の λ_k と y^k とを代入すれば，つぎのようになる：

$$\dot{\xi}^k+i\dot{\eta}^k=(\mu_k+i\nu_k)(\xi^k+i\eta^k)=\mu_k\xi^k-\nu_k\eta^k+i(\nu_k\xi^k+\mu_k\eta^k).$$

この関係式の実部と虚部とをそれぞれ等置して，方程式系 (22) がえられる．これで **F**] が証明された．

方程式系 (19) は明らかに，解

$$y^k=c_k e^{\lambda_k t}, \quad k=1, \cdots\cdots, n,$$

をもつ．しかし，最初の方程式系 (3) の解をうるには未知関数 (15) から未知関数 (13) にもどる必要がある．そのためには，行列 A の固有ベクトル (23) を知る必要がある ((24) を見よ)．したがって **F**] は定理 10 と同値になる．

行列 A が一般の場合に方程式系 (1) を解くには，A をジョルダン標準形に変換すればよい．つぎの **G**] は定理 11 に同値である．

G] 任意の行列 A を係数とする方程式系 (1) を考える．変換 (14) を適当にとって，行列 B をジョルダン標準形にする (§36 を見よ)．行列 A の固有値

の1つをλとし，行列Bの中の固有値λに対応するジョルダン区画*) の大きさをkとする．いま，この区画が行列Bの最初のk行k列をしめているものと考えよう．そうすると，この区画に対応する方程式系はつぎのようになる：

$$\dot{y}^1=\lambda y^1+y^2,\quad \dot{y}^2=\lambda y^2+y^3, \cdots\cdots, \dot{y}^{k-1}=\lambda y^{k-1}+y^k,\quad \dot{y}^k=\lambda y^k.$$

行列 B の他の各ジョルダン区画に対しても上と同様な方程式系が対応し，これらを解くことは容易である．

例

1.　方程式系（1）を解くのにこの§で述べた方法を適用するには，特性系列からなる基底

$$\boldsymbol{h}_1, \cdots\cdots, \boldsymbol{h}_n$$

を求めねばならなかった（定理 11 を見よ）．これを求めることはまったく代数的な問題である．以下ではこの§の結果をもちいて，特性系列からなる基底を求めずに，方程式系（1）を未定係数法によって解く方法をしめそう．λを行列 (a_j^i) の1つの固有値とする．この固有値には，一般にいくつかの特性系列が対応する．これらの特性系列の長さの最大値をkとする．定理 11 によって，固有値λに対応する解はすべてつぎの形に書かれる：

$$x^i=f^i(t)e^{\lambda t},\qquad i=1, \cdots\cdots, n, \tag{25}$$

ただし $f^i(t)$ は次数 $\leqq k-1$ の多項式である．したがって方程式系（1）に (25) の形の解を代入し，多項式 $f^i(t)$ $(i=1, \cdots\cdots, n)$ の係数を未知定数と考えて，未定係数法によって固有値λに対応する系（1）のすべての解を求めることができる．この方法で方程式系（1）を解く場合には，固有値λに対応する特性系列を知る必要はなく，ただこれらの系列の長ささえわかればよい．その長さを求めることは，行列をジョルダン標準形にすることよりは簡単な代数的問題である．この問題は線形代数学における**行列の単因子論**によって解決される．単因子論はこの本ではまったく使用しない．

2.　こんどは，方程式系 (1) を §11 で述べた消去法によって解く方法を述べよう．消去法を適用するため，

---

*)　訳注：　ジョルダン標準形Bは一般につぎの形の行列

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix},\quad (\mu)$$

をその対角線上の要素が B の対角線と一致するようにしてならべ，その他の要素は全部0としたものである．この個々の小行列を固有値λ (μ) に対するジョルダン区画といい，その次数kをこのジョルダン区画の大きさという $(k\geqq 1)$．

$$L^i_j(p)=a^i_j-p\delta^i_j$$

とおいて，(1) を

$$\sum_{j=1}^{n} L^i_j(p)x^j=0, \quad i=1, \cdots\cdots, n,$$

と書きあらわそう．この場合には，行列 $(L^i_j(p))$ の行列式 $D(p)$ は行列 (a^i_j) の特性多項式にほかならない．λ を多項式 $D(p)$ の1つの根すなわち行列 (a^i_j) の固有値とし，その重複度を l とする．§11 の C］によれば，根 λ に対応する方程式系 (1) の解はすべて

$$x^i=g^i(t)e^{\lambda t}, \quad i=1, \cdots\cdots, n,$$

の形で求められる．ただし多項式 $g^i(t)$ の次数は $l-1$ をこえない．この方法と例1でしめした方法とをくらべてみると，そのちがいは多項式の最大次数のとりかたにあるにすぎないが，例1の方法は多項式の次数のいっそう精密な定めかたを与えるものである．というのは，k は一般に l をこえないからである．実際，l は固有値 λ に対応するすべての特性系列の長さの和であるから，$k=l$ となるのは固有値 λ に対応する特性系列が1つしかない場合にかぎる．

§15. 微分方程式の自律系とその相空間

この§では，微分方程式の自律系に対して相空間という概念を導入して1つの解釈を与えることにする．この解釈は §1, 3で述べた方程式系の幾何学的解釈とは本質的に異なり，正しくは運動学的な解釈とよばれるべきものである．というのは，この解釈では方程式系のおのおのの解に対して，空間での曲線を対応させるのではなく，曲線上の点の運動を対応させるからである．運動学的な解釈(相空間)はいくつかの点で幾何学的解釈(積分曲線の族)よりも自律系に対する表現としてすぐれたものである．

自　律　系

常微分方程式系の中に独立変数(または時間とよぶ) t があらわに含まれていない場合，これを自律系という．これは，方程式系によって記述される未知関数の変化の法則が時間の経過に対して——ふつう物理法則に対してそうであるように——不変であることを意味している．もし

$$x^i=\varphi^i(t), \quad i=1, \cdots\cdots, n,$$

がある自律方程式系の解であれば，任意の定数 c に対して

$$x^i=\varphi_*^i(t)=\varphi^i(t+c),\qquad i=1,\cdots\cdots,n,$$

もやはり，同じ自律方程式系の解であることが簡単に証明される．これを正規形の自律方程式系を例にとって証明してみよう．

A]　正規形の n 階自律方程式系

$$\dot{x}^i=f^i(x^1,\cdots\cdots,x^n),\qquad i=1,\cdots\cdots,n,\tag{1}$$

が与えられたとし，これをベクトルの記法によって

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

と書こう．（1）が自律系であるというのは，関数 $f^i(x^1,\cdots\cdots,x^n)(i=1,\cdots\cdots,n)$ が変数 $x^1,\cdots\cdots,x^n$ だけの関数であって，時間 t に関係しないということである．関数 $f^i(x^1,\cdots\cdots,x^n)$ は n 次元の $(x^1,\cdots\cdots,x^n)$-空間のある開集合 Δ で定義され，かつ $f^i(x^1,\cdots\cdots,x^n)$ もその1階偏導関数もすべて Δ で連続であると仮定しよう．もし

$$x^i=\varphi^i(t),\qquad i=1,\cdots\cdots,n,\tag{2}$$

が方程式系（1）の解であれば，

$$x^i=\varphi_*^i(t)=\varphi^i(t+c),\qquad i=1,\cdots\cdots,n,\tag{3}$$

もまた系（1）の解である．まずこのことを証明しよう．合成関数の微分法の公式によって，

$$\dot{\varphi}_*^i(t)=\frac{d}{dt}\varphi_*^i(t)=\frac{d}{dt}\varphi^i(t+c)=\frac{d}{d(t+c)}\varphi^i(t+c)\cdot\frac{d(t+c)}{dt}$$
$$=\dot{\varphi}^i(t+c)\cdot 1=\dot{\varphi}^i(t+c).$$

すなわちつぎの関係がえられる：

$$\dot{\varphi}_*^i(t)=\dot{\varphi}^i(t+c),\qquad i=1,\cdots\cdots,n.\tag{4}$$

つぎに（3）が系（1）の解であることを証明しよう．（2）は（1）の解であるから，つぎの恒等式が成り立つ：

$$\dot{\varphi}^i(t)=f^i(\varphi^1(t),\cdots\cdots,\varphi^n(t)),\qquad i=1,\cdots\cdots,n.$$

これらの恒等式において t を $t+c$ でおきかえれば，

$$\dot{\varphi}^i(t+c)=f^i(\varphi^1(t+c),\cdots\cdots,\varphi^n(t+c)),\qquad i=1,\cdots\cdots,n.$$

これから（4）と（3）とによって，

$$\dot{\varphi}^i_*(t)=\dot{\varphi}^i(t+c)=f^i(\varphi^1(t+c),\cdots\cdots,\varphi^n(t+c))=f^i(\varphi^i_*(t),\cdots\cdots\varphi^i_*(t))$$

がえられる．ゆえに（3）も（1）の解である．

さて，系（1）の解の運動学的な解釈を与えることにしよう．そのためには n 次元空間における解釈を考察しなければならないが，直観的には平面の場合 $(n=2)$ を考えるとわかりやすい．

B］ 自律系（1）の任意の解

$$x^i=\varphi^i(t),\qquad i=1,\cdots\cdots,n, \tag{5}$$

に対し，$x^1,\cdots\cdots,x^n$ は空間の点の座標，t は時刻と考えて，（5）によって与えられる n 次元空間での点の運動を対応させよう．点は動きながらある曲線――運動の**軌道**――をえがく．解（5）に，運動の状況ではなく，単に点の運動の軌道を対応させるだけでは，解について不完全な知識しかえられないので，この場合せめて軌道上の点の運動の向きだけでも明らかにすることがのぞましい．解（5）とともに，別の解

$$x^i=\psi^i(t),\qquad i=1,\cdots\cdots,n, \tag{6}$$

を考えると，これらの解に対応する2つの軌道は，空間内で互いに交わらないか，それとも一致してしまう．すなわち，もし2つの軌道が少なくとも一点を共有していれば，つまり

$$\varphi^i(t_1)=\psi^i(t_2),\qquad i=1,\cdots\cdots,n, \tag{7}$$

ならば，

$$\psi^i(t)=\varphi^i(t+c),\quad ここに\quad c=t_1-t_2. \tag{8}$$

最後の等式はつぎのことをしめしている：第1および第2の解のえがく軌道は互いに一致するが，第1の解は第2の解がえがくのと同じ軌道を時間 c だけ《おくれて》えがく．すなわち，第1の解に対応する点が時刻 $t+c$ のときに軌道上のある位置にあったとすると，第2の解に対応する点は時刻 t のときすでにこの位置にあったわけである．

等式（7）から恒等式（8）をみちびき出すため，解（5）とともに，解

$$\varphi^i_*(t)=\varphi^i(t+c),\qquad i=1,\cdots\cdots,n, \tag{9}$$

を考えよう（**A**］を見よ)．$c=t_1-t_2$ に対し，等式（7）から

$$\varphi_*^i(t_2)=\varphi^i(t_2+c)=\varphi^i(t_1)=\psi^i(t_2), \qquad i=1, \cdots\cdots, n,$$

がえられる．したがって系（1）の解（6）と（9）とは同じ初期条件（すなわち時刻 t_2 における位置）をもつから，一意性の定理によってそれらは一致しなければならない．ゆえに

$$\psi^i(t)=\varphi_*^i(t)=\varphi^i(t+c), \qquad i=1, \cdots\cdots, n.$$

平衡点と閉軌道

自律系（1）の解のえがく軌道が自分自身と交わることができるかどうかという問題を考えてみよう．

C］
$$x^i=\varphi^i(t), \qquad i=1, \cdots\cdots, n, \tag{10}$$

を系（1）の解とし，等式

$$\varphi^i(t_1)=\varphi^i(t_2), \qquad i=1, \cdots\cdots, n, \quad t_1 \neq t_2, \tag{11}$$

が成り立ったとしよう．もちろん t_1, t_2 は解 (10) の定義区間 $r_1<t<r_2$ に属する数である．そうすれば，解 (10) は無限区間 $-\infty<t<+\infty$ 全体にまで延長され，しかも互いに排反するつぎの2つの場合がおこる：

1) すべての t に対して，等式

$$\varphi^i(t)=a^i, \qquad i=1, \cdots\cdots, n,$$

が成立する．ここに $(a^1, \cdots\cdots, a^n)$ は t に無関係な集合 Δ の1点である．したがってこの場合，点 $(\varphi^1(t), \cdots\cdots, \varphi^n(t))$ は t が変化しても実際には動かないで1個所にとどまっている．解 (10) それ自身および点 $(a^1, \cdots\cdots, a^n)$ はこのとき，系（1）の**平衡点**とよばれる．

2) 正の数 T が存在して，すべての t に対して

$$\varphi^i(t+T)=\varphi^i(t), \qquad i=1, \cdots\cdots, n,$$

となるが，$|\tau_1-\tau_2|<T$ のときには少なくとも1つの $i(=1, \cdots\cdots, n)$ に対して

$$\varphi^i(\tau_1) \neq \varphi^i(\tau_2)$$

となる．この場合には解 (10) を周期 T の**周期解**といい，また解 (10) のえがく軌道を**閉軌道**または**サイクル** (cycle) という．

C］を証明しよう．**B**］で注意したように，等式 (11) から恒等式

$$\varphi^i(t+c)=\varphi^i(t), \qquad i=1, \cdots\cdots, n, \quad c=t_1-t_2, \tag{12}$$

がえられる．このとき関数 $\varphi^1(t+c),\cdots\cdots,\varphi^n(t+c)$ もまた系（1）の解となる（A］を見よ）．この解と最初の解（11）とは両者の定義域の共通部分においては一致する（定理3）．いま，これら2つの解を合併すれば，最初の解の定義区間よりもさらに広い定義区間——$c>0$ ならば区間 $r_1-c<t<r_2$, $c<0$ ならば区間 $r_1<t<r_2-c$——をもつあたらしい解がえられる．t_1 と t_2 との役割を取り換えて考えれば c の符号は変わるから，けっきょく，最初の解は区間 $r_1-|c|<t<r_2+|c|$ にまで延長される．この延長された解に対しても等式（11）は依然として成り立つから，いま述べた解の定義区間を拡げる方法をまたも適用することができる．こうして，解（10）は恒等式（12）を保存したまま数直線全体にまで延長される．

つぎに，恒等式（12）を成り立たせる数 c をすべて解（10）の**周期**とよぶことにして，解（10）の周期全体の集合を F であらわそう．F は実数からなる1つの集合である．F のいくつかの性質を明らかにしよう．恒等式（12）において t を $t-c$ でおきかえれば，$\varphi^i(t)=\varphi^i(t-c)$ となる．ゆえに c が周期であれば，$-c$ もやはり周期である．つぎに c_1 と c_2 とが周期であるとしよう．すなわち

$$\varphi^i(t+c_1)=\varphi^i(t),\quad \varphi^i(t+c_2)=\varphi^i(t),\qquad i=1,\cdots\cdots,n.$$

このとき $\varphi^i((t+c_2)+c_1)=\varphi^i(t+c_2)=\varphi^i(t)$, $i=1,\cdots\cdots,n$, となる．したがって c_1, c_2 が周期であれば，c_1+c_2 もまた周期である．また，ある数 c_0 に収束するような周期の系列を $c_1,c_2,\cdots\cdots,c_m,\cdots\cdots$ としよう．すなわち

$$\varphi^i(t+c_m)=\varphi^i(t),\qquad i=1,\cdots\cdots,n,\quad m=1,\ 2,\cdots\cdots.$$

関数 $\varphi^i(t)$ は連続であるから，$m\to\infty$ のとき

$$\varphi^i(t+c_0)=\varphi^i(t)$$

となる．ゆえに c_0 もやはり周期である．したがって F は閉集合である．

恒等式（12）の c は0でないから（$t_1\neq t_2$），集合 F は0でない数を含む．上述の性質から容易にわかるように，集合 F に対してつぎの2つの場合だけが起こりうる：

1′) 集合 F は実数全体に一致する；

2′) 集合 F の中に最小の正の数Tが存在し，FはTの倍数の全体からなる．

実際に上のふたとおりの場合だけしかないことを証明しよう．集合 F に c が含まれれば $-c$ も F に含まれ，かつ F の中には 0 と異なる数があるから，F の中には正の数が含まれている．

いま集合 F の中に最小の正の数がなかったとしよう．すなわち任意の正の数 ε に対して正の周期 $c<\varepsilon$ があるとしよう．集合 F に関する上述の性質により，m を整数とするとき，mc もまた周期である（c は周期だから)．$c<\varepsilon$ であるから，任意の実数 c_0 に対して整数 m を，$|c_0-mc|<\varepsilon$ となるようにとることができる．したがって任意の数 c_0 は集合 F の集積点であり，F は閉集合であったから，F は実数全体の集合と一致する．

こんどはFが実数全体の集合ではないとしよう．いま証明したことから，この場合には F の中に最小の正の数 T がある．さて任意の周期 c に対して，整数 m を $|c-mT|<T$ となるようにとることができる．もし $c\neq mT$ であったとすると，$|c-mT|$ は 0 と異なる周期でかつ $|c-mT|<T$ であるから，これは周期 T の最小性に矛盾する．けっきょく，F の任意の数 c は $c=mT$（m は整数）という形に書きあらわされる．

これで，F が実数全体の集合であれば 1) の場合であり，またもし F が実数全体の集合でなければ 2) の場合になることがわかった．

これで C］が証明された．

C］を簡略に述べれば，つぎの 3 種類の軌道がある，ということになる：1) 平衡点；2) 周期的な軌道（閉軌道)；3) 自分自身と交わらない軌道．もちろん，最後の場合を《最も一般な場合》と考えるべきである．

定理 2 によって系（1）の定義領域 Δ の各点を（1）の解がえがく軌道がとおるから，けっきょく，領域 Δ 全体が軌道の族によってうめつくされ，しかも B］によって，これらの軌道は互いに交わることがない．あらゆる軌道のうちで自分自身と交わる軌道すなわち平衡点および閉軌道はとくに注目される．これら 2 種類の軌道は重要な意味をもつからである．

以上が自律方程式系の運動学的な解釈である．もちろん，この方程式系の幾

何学的解釈も許される.

相　空　間

D] 自律方程式系（1）は開集合 Δ で定義されているから，集合 Δ の各点 $(x_0^1, \cdots\cdots x_0^n)$ に n 個の数からなる系列

$$f^1(x_0^1, \cdots\cdots, x_0^n), \cdots\cdots, f^n(x_0^1, \cdots\cdots, x_0^n)$$

を対応させることができる. これらの数は，点 $(x_0^1, \cdots\cdots, x_0^n)$ を始点とする n 次元空間の中のベクトル $f(x_0^1, \cdots\cdots, x_0^n)$ の成分であると考えることができる. こうして，自律系には幾何学的対象すなわち集合 Δ で定義されたベクトル場が対応する. 集合 Δ の各点 $(x_0^1, \cdots\cdots, x_0^n)$ において，この点を始点とするベクトル $f(x_0^1, \cdots\cdots, x_0^n)$ が定義されているわけである. この幾何学的解釈と解の運動学的な解釈との関係は，要するにつぎのようなものである：$(x_0^1, \cdots\cdots, x_0^n)$ を Δ の任意の点とする. 方程式系の幾何学的解釈によれば，この点にはこの点を始点とするベクトル $f(x_0^1, \cdots\cdots, x_0^n)$ が対応させられている. また定理 3 によって，系（1）の解 $x^i=\varphi^i(t)$ で初期条件

$$\varphi^i(t_0)=x_0^i, \qquad i=1, \cdots\cdots, n,$$

をみたすものがある. 他方，運動学的な解釈によれば，解 $x^i=\varphi^i(t)$ には空間内で 1 つの軌道をえがくような点の運動が対応し，時刻 $t=t_0$ のとき軌道上の動点は点 $(x_0^1, \cdots\cdots, x_0^n)$ を通過する. しかも解曲線 $x^i=\varphi^i(t)$ をえがく動点の速度ベクトルは，動点が点 $(x_0^1, \cdots\cdots, x_0^n)$ を通過する瞬間にベクトル $f(x_0^1, \cdots\cdots, x_0^n)$ に一致する. この関係をあらわすのが，方程式系（1）において

$$x^i=x_0^i, \qquad i=1, \cdots\cdots, n, \quad t=t_0$$

とした場合にほかならない.

自律系（1）それ自身はベクトル場として，またその解は軌道としてあらわされるような n 次元空間を自律系（1）の**相空間**と名づける. 軌道を**相軌道**といい，ベクトル $f(x_0^1, \cdots\cdots, x_0^n)$ を**相速度**という. 2 つの解釈の間の関係は，けっきょく，軌道上の動点の瞬間々々の速さはこの動点がその瞬間に通過する点における相速度に一致する，ということになる.

つぎに平衡点を相速度の見地から考察してみよう.

E〕 集合 Δ の点 $(a^1, \cdots\cdots, a^n)$ が自律系（1）の平衡点であるためには，すなわち

$$\varphi^i(t) \equiv a^i, \qquad i=1, \cdots\cdots, n, \tag{13}$$

となるような解 $x^i=\varphi^i(t)$ が存在するためには，点 $(a^1, \cdots\cdots, a^n)$ における相速度 $f(a^1, \cdots\cdots, a^n)$ が 0 に等しいことが必要かつ十分である．したがって系（1）のすべての平衡点を求めるには，方程式系

$$f^i(x^1, \cdots\cdots, x^n)=0, \qquad i=1, \cdots\cdots, n,$$

を解かねばならない．これは微分方程式系ではなく，代数方程式系である（その中に導関数を含んでいない）．

E〕を証明するため，$(a^1, \cdots\cdots, a^n)$ が平衡点すなわち関係式 (13) をみたす解 $x^i=\varphi^i(t)$ があるとして，これを系（1）に代入しよう．定数の導関数は 0 に等しいから，代入の結果，

$$f^i(a^1, \cdots\cdots, a^n)=\frac{d}{dt}\varphi^i(t)=\frac{d}{dt}a^i=0$$

となる．ゆえに，相速度ベクトル $f(a^1, \cdots\cdots, a^n)$ はたしかに点 $(a^1, \cdots\cdots, a^n)$ において 0 になる．逆に，点 $(a^1, \cdots\cdots, a^n)$ における相速度ベクトル $f(a^1, \cdots\cdots, a^n)$ が 0 であったとする．すなわち $f^i(a^1, \cdots\cdots, a^n)=0$, $i=1, \cdots\cdots, n$. この場合 (13) は系（1）の解であることがわかる．実際，(13) を（1）に代入すると

$$\dot{\varphi}^i(t)=f^i(a^1, \cdots\cdots, a^n), \qquad i=1, \cdots\cdots, n,$$

となる．なぜなら左辺は定数の導関数 0 であり，右辺は 0 だからである．

F〕 方程式系（1）の解（2）を §3 で述べた方法で幾何学的に解釈すれば，この解には方程式系（2）で定義される $(n+1)$-次元の $(t, x^1, \cdots\cdots, x^n)$-空間 R 内の曲線 K が対応する．ここでは t は空間 R の座標成分である．ところが同じ解を座標成分 $x^1, \cdots\cdots, x^n$ をもつ n 次元の相空間 S で考えるということは，t を曲線上の点の1つの座標成分としてではなく，パラメータとみることにほかならない．したがって，相軌道 L は曲線 K を空間 S 上に t 軸に沿って射影することによってえられる．

$n=2$ の場合，この射影の幾何学的な意味は容易は想像できるであろう．実際，このとき空間 R は3次元であり，空間 S は平面である（例4を見よ）.

例

1.　1階自律微分方程式

$$\dot{x}=f(x) \tag{14}$$

を考えよう．ただし，この右辺およびその導関数は変数 x の変域である数直線 P 全体で連続であると仮定する．その上さらに，関数 $f(x)$ の零点すなわち方程式 (14) の平衡点は集積点をもたないものとする．そうすれば，平衡点は直線 P を区間の族 Σ に分割する．Σ のいかなる区間 (a,b) においても関数 $f(x)$ は 0 にならず，その各端点 a,b は関数 $f(x)$ の零点であるか，さもなければ $\pm\infty$ である．このように，Σ は有限もしくは可算個の区間からなり，しかも2個より多くの半無限区間を含まず，ときには両端とも有限でない1つの区間 $(-\infty,\ +\infty)$ だけからなることもある．(a,b) を Σ に属する任意の区間，x_0 をこの区間の点，$x=\varphi(t)$，$r_1<t<r_2$，は初期値 0, x_0 をもつ方程式 (14) の延長不能な解とする．議論を明確にするため，$f(x_0)>0$ としよう．このとき，つぎのことがわかる：

$$r_1<t<r_2 \quad \text{のとき} \quad a<\varphi(t)<b, \tag{15}$$

$$\lim_{t\to r_1}\varphi(t)=a, \qquad \lim_{t\to r_2}\varphi(t)=b. \tag{16}$$

さらに，a が有限ならば $r_1=-\infty$，b が有限ならば $r_2=+\infty$ である．したがって（図 17），区間 (a,b)，(b,c)，…… のおのおのは方程式 (14) の1つの相軌道なのである．

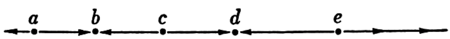


図　17

関係 (15)，(16) を証明しよう．仮定 $f(x_0)>0$ より，(a,b) 上では $f(x)$ はつねに正であるから，この区間の各点は相軌道をえがきつつ左から右へ動く．ゆえに t が増加するとき点 $\varphi(t)$ が (a,b) の外に出られるのは，この点が右の端点 b を通過する場合にかぎる．もし $\varphi(t_1)=b$ になったとすると，これは2つの異なる軌道 $x=\varphi(t)$ と $x=b$ とが交わることを意味し不合理である．まったく同様にして，点 $\varphi(t)$ は t が減少する場合にも (a,b) の外に出られないことが証明される．これで，関係 (15) が証明された．

つぎに $\lim\limits_{t\to r_2}\varphi(t)=c<b$ であったとする．$\psi(t)$ を方程式 (14) の初期値 $0,c$ の解とすれば，$f(c)>0$ であるから，ある負の数 t_2 に対して $\psi(t_2)<c$ となる．これは2つの異なる軌道 $\varphi(t)$ と $\psi(t)$ とが交わることを意味し不合理である．ゆえに $\lim\limits_{t\to r_2}\varphi(t)=b$ が証明された．まったく同様にして $\lim\limits_{t\to r_1}\varphi(t)=a$ が証明される．

最後に，$b<+\infty$ ならば $r_2=+\infty$ となることをしめそう．いまそうでなかったとする，すなわち $r_2<+\infty$ だとする．このとき関数 $\chi(t)$ をつぎのように定義する：$r_1<t$

$<r_2$ のとき $\chi(t)=\varphi(t)$，$t\geqq r_2$ のとき $\chi(t)=b$．明らかに関数 $\chi(t)$ は連続であって方程式 (14) をみたすが，これは不合理である．なぜなら，このとき2つの異なる軌道 $x=\chi(t)$ と $x=b$ とが交わるからである．ゆえに $r_2=+\infty$ でなければならない．まったく同様に，$a>-\infty$ ならば $r_1=-\infty$ となることが証明される．

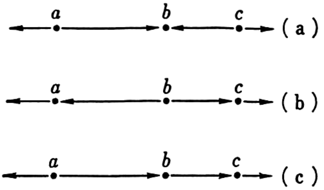


図 18

方程式(14)の任意の平衡点 b を右または左の端点とする族 Σ の区間を (a,b)，(b,c) とする．区間 (a,b)，(b,c) はいずれも1つの軌道である．軌道 (a,b)，(b,c) をえがく2つの動点が（t が増加するときに）平衡点 b に近づくならば，この平衡点 b は**安定**であるという（図 18，(a)）．軌道 (a,b)，(b,c) をえがく2つの動点が点 b から遠ざかるならば，平衡点 b は**不安定**であるという（図 18，(b)）．また動点が一方の軌道上では平衡点 b に近づき，他方の軌道上では点 b から遠ざかるならば，平衡点 b は**半安定**であるという．平衡点 b が安定であるためには，関数 $f(x)$ が区間 (a,b) では正であり，また区間 (b,c) では負であることが必要かつ十分である．平衡点 b が不安定であるためには，関数 $f(x)$ が区間 (a,b) では負であり，また区間 (b,c) では正であることが必要かつ十分である．平衡点 b が半安定であるためには，関数 $f(x)$ が区間 (a,b) と (b,c) とにおいて同符号であることが必要かつ十分である．

$\dot{f}(b)\fallingdotseq 0$ としよう．このとき，関数 $f(x)$ の符号は点 b の近くでは $\dot{f}(b)(x-b)$ の符号と同じである．このことから，方程式 (14) の平衡点 b は $\dot{f}(b)<0$ のとき安定であり，また $\dot{f}(b)>0$ のとき不安定であることがわかる．

2. $f(x)$ が連続な1階導関数をもつような周期関数である場合に，方程式

$$\dot{x}=f(x) \tag{17}$$

を考えてみよう．議論を明確にするため，$f(x)$ の周期は 2π とする．方程式 (17) は方程式 (14) の特別の場合であるから，例1で方程式 (14) に対して述べたことがらは，すべてそのまま方程式 (17) に対しても成り立つ．しかし方程式 (17) の特殊性（関数 $f(x)$ の周期性）を考慮にいれると，方程式 (17) の相空間が直線ではなく，ある定点 0 と回転の向き（たとえば時計の針と反対）の定められた半径1の円周 K であると考えるほうがつごうがよい．任意の数 x には，円周上の定点0から時計の針と反対の向きに長さ x の円弧をはかってえられる K 上の点 ξ を対応させる（図 19）．この場合，$x+2k\pi$（k は整数）という形の数すべてに円周上の同じ点 ξ が対応することになる．

$f(x+2k\pi)=f(x)$ であるから，$f(\xi)=f(x)$ とおくことによって，関数 f は円周 K 上で定義されると考えてよい．こうして方程式 (17) は，円周 K 上の点 ξ の運動を規定する方程式になる．$x(t)$ が方程式 (17) の解ならば，$x(t)$ に対応する点 $\xi(t)$ は円周 K 上を動く．α を $f(\alpha)=0$ であるような円周 K 上の点とすれば，$\xi(t)=\alpha$ となるような

方程式 (17) の解 $x(t)$ が存在し，αは方程式 (17) の平衡点である．簡単のため方程式 (17) の平衡点は，円周 K 上に集積点をもたないものとしよう．そうすると，平衡点は有限個存在するか，もしくはまったく存在しないかである (図 20)．これらの平衡点によって円周は有限個の区間からなる族 $\sum$ に分割される．平衡点がまったく存在しない場合には，族 $\sum$ はただ 1 つの《区間》(円周) からなる．平衡点がただ 1 つ存在する場合には，族 $\sum$ は円周 K からこの点だけをとりのぞいてえられるただ 1 つの区間からなる．平衡点がない場合には区間は端点をまったくもたず，ただ 1 つの場合には 2 つの端点が一致する．I を族 $\sum$ の 1 つの区間，ξ_0 を区間 I の 1 点，x_0 は ξ_0 をその対応点とする数の 1 つとし，初期値 $0, x_0$ をもつ方程式 (17) の解を $x(t)$ とする．解 $x(t)$ は t のすべての値に対して定義され，かつ点 $\xi(t)$ は区間 I に属する．もし区間 I が（1 つまたは 2 つの）端点をもつならば，点 $\xi(t)$ は区間 I 全体を一定の向きに動き，しかも区間 I の各点を 1 回だけ通過する．区間 I が円周全体に一致していれば，点 ξ_0 を出発した動点はある時間 T だけたつと，ふたたび点 ξ_0 にもどってくる．ゆえに $\xi(0)=\xi(T)$．この場合には，$\xi(t)$ は周期 T をもつ t の周期関数になる．運動 $\xi(t)$ に対応する方程式 (17) の解 $x(t)$ は，つぎの条件をみたす：

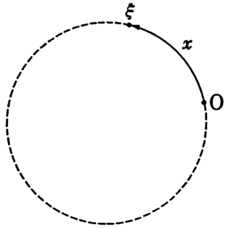


図 19

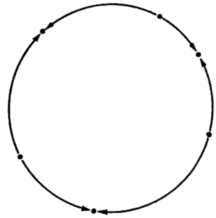


図 20

$$x(t+T)=x(t)\pm 2\pi.$$

この例からもわかるように，方程式系の相空間としてユークリッド空間を考えることは必らずしも目的にかなうものではなく，ときによってはより複雑な幾何学的対象を考える必要がある．つぎの例 3 では，この例よりもいくらかこみいった事情のもとで，そのような情況に出会うであろう．

3. 方程式

$$\dot{x}^i=f^i(x^1, x^2), \qquad i=1, 2, \tag{18}$$

を考察しよう．ただし関数 $f^i(x^1, x^2)$ は 2 変数 x^1, x^2 に関する周期 2π の周期関数：

$$f^i(x^1+2k\pi, x^2+2l\pi)=f^i(x^1, x^2), \qquad i=1, 2,$$

とする．いつものとおり，$f^i(x^1, x^2)$ は連続でその 1 階導関数も連続であると仮定する．関数 $f^i(x^1, x^2)$ の周期性によって，系 (18) の相空間として，平面ではなくそれよりやや複雑な幾何学的図形である**輪環面**（トーラス (torus) ともいう）を考えるほうがつごうがよい (図 21)．この曲面について説明しよう．直交座標 x, y, z をもつ 3 次元ユークリッド空間の中で，xz-平面上に中心 $(2, 0, 0)$，半径 1 の円Kをとる．この円周上で点 $(3, 0, 0)$ を基点にして，任意の数 x^1 に円周 K 上の点 ξ_1 を対応させることができる (例 2 を見よ)．つぎに (x, y, z)-空間内で xz-平面を z 軸のまわりに回転させることに

する．このとき，円周 K のえがく曲面 P が**輪環面**である．ξ^1 を円周 K 上のある点としよう．xz-平面を（ラジアンではかって）角 x^2 だけ回転すると，その結果，点 ξ^1 は輪環面 P 上のある点 p にうつる（図 21）．いまもし角 x^2 ではなく角 $x^2+2k\pi$ だけ回転させれば，点 ξ^1 はやはり輪環面 P 上の同じ点 p に到達する．したがって，輪環面 P 上の点 p は2つの**周期座標** ξ^1, ξ^2 によって一意的にきまり，また任意の周期座標 ξ^1, ξ^2 には輪環面上の完全に確定した点が対応する．こうして，関数 $f^i(x^1, x^2)$ は平面上で定義されているのではなく，曲面の一種である輪環面 P 上で定義されていると考えることができる．すなわち

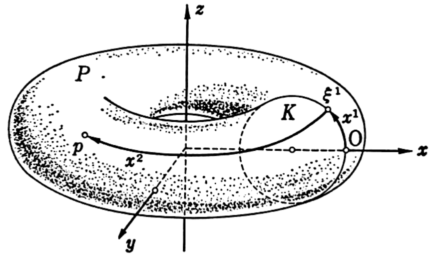


図　21

$$f^i(\xi^1, \xi^2) = f^i(x^1, x^2).$$

いま $x^1(t), x^2(t)$ を系 (18) の1つの解としよう．数 $x^1(t), x^2(t)$ にそれぞれ周期座標 $\xi^1(t), \xi^2(t)$ を対応させると，輪環面 P 上の点 $(\xi^1(t), \xi^2(t))$ がえられる．したがって系 (18) の任意の解 $x^1(t), x^2(t)$ には輪環面上の点の1つの運動が対応し，各瞬間における点の運動の法則はその瞬間に軌道が通過する輪環面上の点 $\xi^1(t), \xi^2(t)$ だけに関係してきまる．なぜなら，関数 $f^i(\xi^1, \xi^2)$ は輪環面上で定義されているからである．結局，輪環面全体は軌道によっておおわれ，2つの軌道は交わらないか，または一致する．特に，軌道が自分自身と交わる場合には，それは閉軌道であるかそれとも平衡点である．

系 (18) の相軌道を平面上でではなく輪環面上で考えることは，系 (18) の特性（関数 f^i の周期性）を反映し，その研究に際してつごうがよいのである．

4.　自律方程式系

$$\dot{x} = -\omega y, \qquad \dot{y} = \omega x$$

の任意の解はつぎの形に書かれる：

$$x = r\cos(\omega t+\alpha), \qquad y = r\sin(\omega t+\alpha) \tag{19}$$

ただし r, α は定数である．方程式 (19) は3次元の (t, x, y)-空間 R においてラ線（$r \neq 0$ のとき）または直線（$r=0$ のとき）をあらわす．しかし変数 x, y の相平面 S においては，方程式 (19) は円周（$r \neq 0$ のとき）または1点——平衡点——（$r=0$ のとき）をあらわす．空間 R 内の解曲線から平面 S 上の相軌道をうるには，前者を t 軸方向に (x, y)-平面の上に射影することによって実現される．

5.　非自律方程式系

$$\dot{x} = 1, \qquad \dot{y} = t$$

の任意の解はつぎの形に書ける：

$$x = t+a, \qquad y = \frac{1}{2}t^2+b, \tag{20}$$

ただし a, b は定数である．定理 2 によれば，方程式 (20) によって定義される 2 つの曲線は，3 次元の (t, x, y)-空間 R において交わらないか，またはまったく一致する（解の一意性）．この曲線を (x, y)-平面 S 上に射影するには (20) から t を消去すればよい．これを実際にやると

$$y=\frac{1}{2}(x-a)^2+b$$

がえられる．この方程式は (x, y)-平面において頂点が (a, b) にあって y 軸に平行な対称軸をもつ放物線をあらわしている．頂点がそれぞれ点 (a_1, b_1), (a_2, b_2) にある 2 つの放物線が交わらないのは $a_1=a_2$ でかつ $b_1 \neq b_2$ の場合にかぎる．もし $a_1 \neq a_2$ であれば，2 つの放物線は（1 点において）交わる．このように 2 つの軌道が交わるのは，最初の微分方程式系が自律系でないことに起因するのである．したがって，自律的でない方程式系の解を (x, y)-平面上にえがくことは適当ではない．

§16. 定係数の線形同次系の相平面

ここでは実定係数 a^i_j の微分方程式系

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}^1&=a^1_1x^1+a^1_2x^2,\\ \dot{x}^2&=a^2_1x^1+a^2_2x^2,\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

すなわちベクトルの記法による

$$\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}, \quad A=\begin{pmatrix}a^1_1 & a^1_2\\ a^2_1 & a^2_2\end{pmatrix}, \tag{2}$$

に対して，その相平面上での相軌道を構成しよう．その際，方程式系の相軌道の模様は係数のとる値に本質的に関係するので，いろいろな場合にわけて考える必要がある．

原点（点 (0,0)）はつねに系（1）の平衡点であることに注意しよう．この点が（1）のただ 1 つの平衡点となるのは，行列 (a^i_j) の行列式が 0 でない場合，すなわちこの行列の固有値が 2 つとも 0 と異なる場合でありかつこの場合にかぎる．

行列 A の固有値が互いに異なる 0 でない実数であったとしよう．そうすれば §14 の結果（定理 10）によって，方程式（2）の任意の実解はつぎの形に書くことができる：

$$\boldsymbol{x}=c^1\boldsymbol{h}_1e^{\lambda_1t}+c^2\boldsymbol{h}_2e^{\lambda_2t}. \tag{3}$$

ただし λ_1, λ_2 は行列 A の実固有値，$\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2$ は互いに 1 次独立な A の実固有ベ

クトル，c^1, c^2 は実定数である．解（3）を基底 $\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2$ によって

$$\boldsymbol{x}=\xi^1\boldsymbol{h}_1+\xi^2\boldsymbol{h}_2 \qquad (4)$$

とあらわせば，

$$\xi^1=c^1e^{\lambda_1 t}, \qquad \xi^2=c^2e^{\lambda_2 t} \qquad (5)$$

となる．系（1）の相平面P上の座標 ξ^1, ξ^2 は一般に直交座標ではないから，適当なアフィン (affine) 写像によって相平面Pを補助的な平面 P^* 上に写像し，これによってベクトル $\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2$ は平面 P^* 上の互いに直交する単位ベクトルにうつるようにして，それらをそれぞれ横軸と縦軸にする（図 22）．そうすると，平面 P 上の点 $\boldsymbol{x}=\xi^1\boldsymbol{h}_1+\xi^2\boldsymbol{h}_2$ はこの写像によって，平面 P^* 上では直交座標 ξ^1, ξ^2 をもつ点にうつされる．こうして（5）式によってパラメータ表示された平面 P 上の軌道は，平面 P^* 上の直交座標に関して，同じ（5）式によってあらわされる軌道（これも**相軌道**という）にうつる．われわれはまず，（5）であらわされる平面 P^* 上の軌道をかき，つぎにそれを平面Pへ逆に写像することにする．平面 P^* 上には，相軌道（5）とともに，方程式

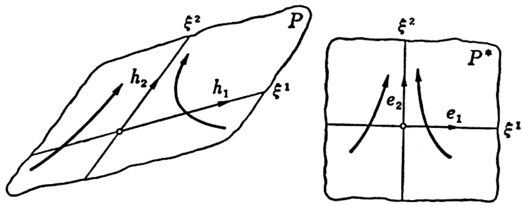


図　22

$$\xi^1=c^1e^{\lambda_1 t}, \qquad \xi^2=-c^2e^{\lambda_2 t} \qquad (6)$$

であらわされる軌道があり，また方程式

$$\xi^1=-c^1e^{\lambda_1 t}, \qquad \xi^2=c^2e^{\lambda_2 t} \qquad (7)$$

であらわされる軌道もある．軌道（6）は横軸に関する軌道（5）の鏡像として，また軌道（7）は縦軸に関する（5）の鏡像としてえられる．このように，上の2つの鏡映写像は平面 P^* 上の軌道全体の模様を不変にたもつ．これからわかるように，第1象限における軌道をかいてしまえば，もう容易に平面 P^* 上のすべての相軌道の模様を知ることができる．

$c^1=c^2=0$ の場合の軌道は，平衡点 $(0,0)$ にほかならないことに注意しよう．$c^2=0$, $c^1>0$ の場合には，横軸の正の半直線をえがく運動がえられ，c^1

$=0$, $c^2>0$ の場合には，縦軸の正の半直線をえがく運動がえられる．$\lambda_1<0$ なら，横軸の正の半直線をえがく運動は原点に向かい，またもし $\lambda_1>0$ なら，この運動は反対の方向すなわち原点から遠ざかる．第１の場合には動点は原点にかぎりなく近づき，第２の場合には動点は原点からかぎりなく遠ざかる．同様なことが，縦軸の正の半直線をえがく運動についてもいえる．もし c^1 と c^2 とが正であれば，動点は第１象限から外に出ることなくその中を動く．つぎに，相平面のいっそうくわしい描写を固有値 λ_1, λ_2 の符号によっていくつかの場合にわけておこなうことにする．

A〕 結節点　固有値 λ_1 と λ_2 とがともに０と異なり，同符号でかつ

$$|\lambda_1|<|\lambda_2| \tag{8}$$

と仮定する．まずはじめに

$$\lambda_1<0, \quad \lambda_2<0$$

の場合をしらべてみよう．この場合には，横軸の正の半直線上での動点の運動は原点に向かい，縦軸の正の半直線上の運動についてもまったく同様である．つぎに第１象限内の任意の軌道上での運動は原点に次第に近づき，かつ軌道は原点で横軸に接する．$t\to-\infty$ の場合には動点の横座標も縦座標も無限に増大するような運動をするが，縦座標の増大性が横座標のそれよりも強いために，その運動は縦軸のほうにかた寄る．相軌道がこのような模様をえがくとき (0,0) を安定結節点という（図 23,（a））．もし不等式（８）が成り立ち，かつ

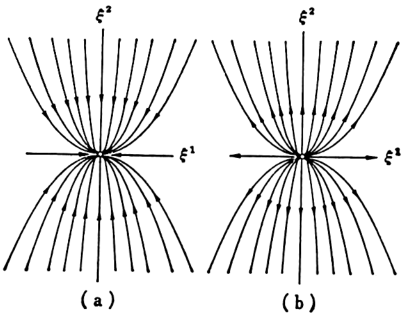


図 23

$$\lambda_1>0, \quad \lambda_2>0$$

であれば，軌道の形は前の場合と同様であるが，運動の方向は正反対になる．この場合，平衡点 (0,0) を**不安定結節点**という（図 23,（b））．

B〕 鞍形点　固有値 λ_1 と λ_2 とが異符号であると仮定する．議論を明確に

するため,

$$\lambda_1<0<\lambda_2$$

と仮定しよう．この場合，横軸の正の半直線上の運動は原点に向かい，他方，縦軸の正の半直線上の運動は原点から遠ざかる．また，第1象限内の軌道の形は双曲線に似ていて，それらの上での動点の運動は，横軸にそっては原点に近づき，縦軸にそっては原点から遠ざかる．相空間における軌道がこのような模様をえがくとき (0,0) を**鞍形点**（または**とうげ点**）という（図 24).

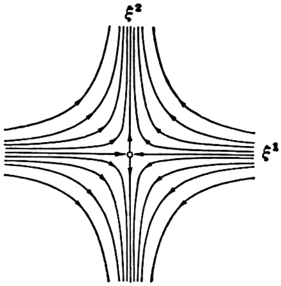


図 24

図 23 の（a),（b）および図 24 は補助的な相平面 P^* 上での軌道の模様をあらわしている．相平面 P 上の模様は P^* を P 上にアフィン写像することによってえられ，それは固有ベクトルに関係する（たとえば図 25，26 を見よ).

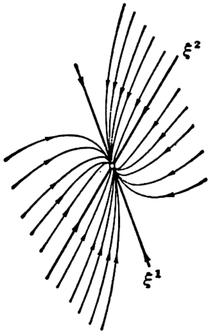


図 25

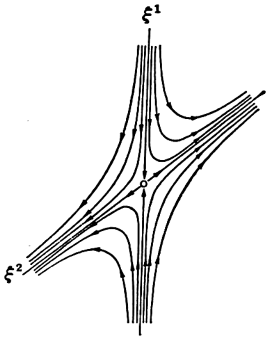


図 26

こんどは，行列 A の固有値が複素数の場合をしらべてみよう．この場合固有値は互いに共役であるから，$\lambda=\mu+i\nu$，$\bar{\lambda}=\mu-i\nu$（ただし $\nu\neq0$）とあらわされる．行列 A の固有ベクトルは互いに共役であるようにえらびうるから，それらを $\boldsymbol{h}$，$\bar{\boldsymbol{h}}$ であらわそう．いま，つぎのようにおく：

$$\boldsymbol{h}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{h}_1-i\boldsymbol{h}_2),$$

ただし $\boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_2$ は実ベクトルとする．このとき $\boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_2$ は互いに1次独立である（もし1次従属であれば $\boldsymbol{h}$, $\bar{\boldsymbol{h}}$ も1次従属になってしまうから）．したがって，ベクトル $\boldsymbol{h}_1$ と $\boldsymbol{h}_2$ とを方程式（2）の相空間の基底にとることができる．

方程式（2）の任意の実解は，c を複素任意定数として，

$$\boldsymbol{x}=c\boldsymbol{h}e^{\lambda t}+\bar{c}\bar{\boldsymbol{h}}e^{\bar{\lambda}t} \tag{9}$$

の形に書くことができる．

$$\zeta=\xi^1+i\xi^2=ce^{\lambda t}$$

とおけば，

$$\boldsymbol{x}=\xi^1\boldsymbol{h}_1+\xi^2\boldsymbol{h}_2$$

となる．相平面 P を補助的な ζ-複素平面 P^* 上へアフィン写像して，ベクトル $\boldsymbol{h}_1$ は1に，ベクトル $\boldsymbol{h}_2$ は i にうつるようにすれば，ベクトル $\xi^1\boldsymbol{h}_1+\xi^2\boldsymbol{h}_2$ には複素数 $\zeta=\xi^1+i\xi^2$ が対応することになる．この写像によって相軌道（9）は，方程式

$$\zeta=ce^{\lambda t} \tag{10}$$

であらわされる平面 P^* 上の相軌道にうつされる．

C］ 渦状点と渦心点　方程式（10）を極座標によって書きかえてみよう．

$$\zeta=\rho e^{i\varphi},\qquad c=Re^{i\alpha}$$

とおけば，

$$\rho=Re^{\mu t},\ \varphi=\nu t+\alpha$$

となる．これが平面 P^* 上での動点の方程式である．$\mu\neq 0$ の場合には，どの軌道も対数ラ線になる．これに対応する平面 P 上の軌道の模様を渦状点という．$\mu<0$ ならば，t が増加するとき動点は対数ラ線をえがきながらかぎりなく原点に近づく．これが安定渦状

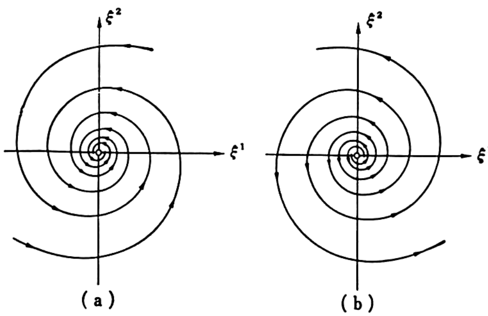


図 27

点の場合である（図27,（a））. $\mu>0$ ならば動点は原点からかぎりなく遠ざかっていく. この場合 $(0,0)$ を**不安定渦状点**（または**うずまき点**）という（図27,（b））. μが0に等しければ, 平衡点 $(0,0)$ 以外のどんな相軌道も閉軌道となり, いわゆる**渦心点**（または**うずの中心**）がえられる（図 28).

図 32 および図 33 は補助的な相平面 P^* 上の軌道の模様をあらわしている. 平面P上の模様はアフィン的にゆがむことになる（たとえば図 29, 30 を見よ).

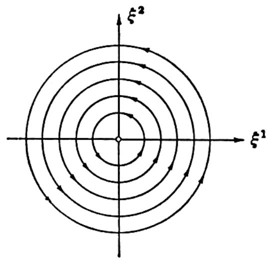


図 28

上で考察したのはいわゆる退化しない場合, すなわち根 λ_1 と λ_2 とが互いに異なりかつ0に等しくない場合であった. この場合には, 行列 (a_j^i) の要素をわずかに変化させるかぎりは, 相軌道の模様の一般的性格は変わらない. ただし渦心点の場合は例外である. この場合

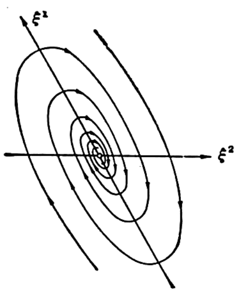


図 29

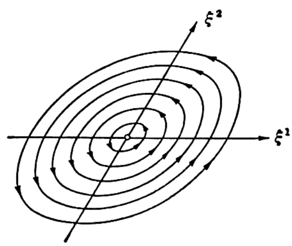


図 30

には, 行列(a_j^i)の要素をわずかに変化させただけで $\mu=0$ とならなくなることがあり, そのとき渦心点は安定または不安定な渦状点に移行する. この退化した場合(渦心点)は重要なのでつぎの例には含めず, 基本的な場合として特にここに述べておいた. これ以外の退化する場合は, 例1と例3においてしらべる.

例

1.（**退化結節点**） 系（1）の行列 A がただ1つの固有値 λ をもつ場合には, 本質的に

異なるつぎの2つの場合がおこりうる．ここで，行列 A に対応する1次変換を A であらわすことにする．

第Iの場合　変換 A の2つの固有ベクトルすなわち，

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}_1=\lambda\boldsymbol{h}_1,\qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{h}_2=\lambda\boldsymbol{h}_2 \tag{11}$$

をみたすベクトル $\boldsymbol{h}_1$，$\boldsymbol{h}_2$ で，平面 P の基底となるものが存在する．

第IIの場合　つぎのような平面 P の基底 $\boldsymbol{h}_1$，$\boldsymbol{h}_2$ が存在する：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}_1=\lambda\boldsymbol{h}_1,\qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{h}_2=\lambda\boldsymbol{h}_2+\boldsymbol{h}_1. \tag{12}$$

(11) または (12) の形の基底が存在することは定理 30 からすぐにわかるが，ここでこの事実を直接に証明してみよう．変換 A の任意の固有ベクトルを $\boldsymbol{h}_1$ とし，$\boldsymbol{h}_1$ と1次独立な任意のベクトルを $\boldsymbol{h}_2$ とする．そのとき，

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}_1=\lambda\boldsymbol{h}_1,\qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{h}_2=\alpha\boldsymbol{h}_1+\mu\boldsymbol{h}_2$$

となる．したがって，基底 $\boldsymbol{h}_1$，$\boldsymbol{h}_2$ のもとでは変換 A の行列は

$$\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ \alpha & \mu\end{pmatrix}$$

となることがわかる．その固有値は λ と μ であるから，$\lambda=\mu$．ゆえに $\alpha=0$ の場合には，基底 $\boldsymbol{h}_1$，$\boldsymbol{h}_2$ に対して関係式 (11) が成り立つ．また $\alpha\neq 0$ の場合には，ベクトル $\boldsymbol{h}_1$ をこれに1次従属なベクトル $\alpha\boldsymbol{h}_1$ でおきかえれば，条件 (12) をみたす基底がえられる．

第Iの場合には，方程式（2）の一般解は

$$\boldsymbol{x}=c^1\boldsymbol{h}_1e^{\lambda t}+c^2\boldsymbol{h}_2e^{\lambda t}=\boldsymbol{x}_0e^{\lambda t} \tag{13}$$

の形に書かれることがすぐにわかる．この解の初期値は $(0,\boldsymbol{x}_0)$ である．$\lambda\neq 0$ の場合には，解はいずれも原点から出る半直線をえがく．$\lambda<0$ ならば運動は原点に向かい（図 31,（a）），$\lambda>0$ ならば原点から遠ざかる（図 31,（b））．$\lambda=0$ の場合については例3を見てほしい．

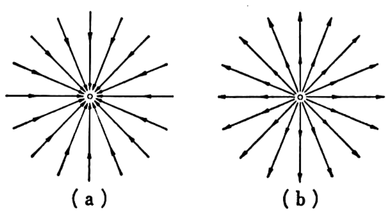


図　31

第IIの場合には，方程式（2）の任意の解は

$$\boldsymbol{x}=c^1\boldsymbol{h}_1e^{\lambda t}+c^2(\boldsymbol{h}_1t+\boldsymbol{h}_2)e^{\lambda t}$$

の形をしていることが，やはりすぐにわかる．この解を基底 $\boldsymbol{h}_1,\boldsymbol{h}_2$ によって $\boldsymbol{x}=\xi^1\boldsymbol{h}_1+\xi^2\boldsymbol{h}_2$ の形に書けば，基底 $\boldsymbol{h}_1,\boldsymbol{h}_2$ をとったときの平面 P 上の軌道の方程式として，

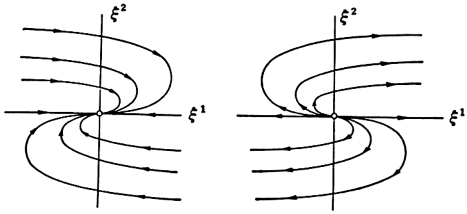
$$\xi^1=(c^1+c^2t)e^{\lambda t},\qquad \xi^2=c^2e^{\lambda t} \tag{14}$$

がえられる．相平面 P 上のベクトル $\boldsymbol{h}_1,\boldsymbol{h}_2$ を平面 P^* 上の互いに直交する単位ベクトルにうつすような P から P^* へのアフィン写像によって平面 P 上の軌道は，平面 P^* 上の直交座標に関してやはり(14)式によってあらわされるような P^* 上の軌道にうつされる．$\lambda\neq 0$ の場合をしらべてみよう（$\lambda=0$ の場合は例3を見よ）．はじめに $\lambda<0$ として，この場合に平面 P^* をうめつくす軌道全体について考えてみる．まず，(14) で c^1，

c^2 の符号を同時に変えれば，平面 P^* の原点に関して対称な軌道がえられることがわかる．したがって上半平面での軌道全体の模様がわかれば十分である．$c^2=0$，$c^1 \neq 0$ のときには，2つの軌道がえられる．すなわち $c^1>0$ の場合の軌道は横軸の正の半直線そのものであり，$c^1<0$ の場合の軌道は横軸の負の半直線そのものであって，この2つの軌道上での動点の運動は原点に向かう．つぎに，$c^1=0$，$c^2>0$ の場合の軌道を考えてみよう．この場合には，

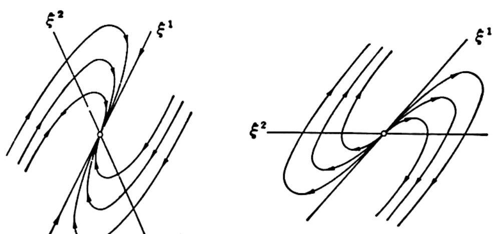
$$\xi^1=c^2te^{\lambda t}, \qquad \xi^2=c^2e^{\lambda t} \tag{15}$$

である．$t=0$ のときには，縦軸上の点 $(0, c^2)$ がえられる．t が0から増加する場合，軌道上の動点はたえず原点に向かって下降しながら，はじめは右へつぎに左へ動いて原点に近づき，かつ軌道は原点で正の横軸に接する．t が0から $-\infty$ に減少する場合，動点は左に動くと同時に上昇するが，上昇するよりも左へ動く方が速いために，その運動の状況は大体において横軸の負の方向にかた寄る．(15) で定数 c^2 にすべての正の数を与えれば，このときにえがかれる軌道は上半平面全体をうめつくす (図 32, (a))．この場合 (0, 0) を**安定退化結節点**という．$\lambda>0$ の場合の軌道は，平面を縦軸に関して鏡映する上述の方法によってえられ (図 32, (b))，それらの上での運動は向きが正反対すなわち原点から遠ざかるものとなる．この場合 (0, 0) を**不安定退化結節点**という．図 33 の (a), (b) は平面 P 上の相軌道をあらわす．



(a) (b)

図 32



(a) (b)

図 33

2. 定係数の2階線形同次方程式

$$\ddot{x}+a\dot{x}+bx=0 \tag{16}$$

を考えよう．この方程式を §4 で述べた方法によって正規形になおすと，

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}&=y, \\ \dot{y}&=-bx-ay, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

となる．方程式系 (17) の相平面を方程式 (16) の相平面とよぶことにする．系 (17) の特性多項式は，方程式 (16) の特性多項式すなわち

$$p^2+ap+b \tag{18}$$

に等しいことがただちにわかる．したがって多項式 (18) の根が虚根であれば，方程式 (16) の相平面の模様は渦状点または渦心点をあらわす．多項式 (18) の根が互いに異なる 0 でない実根の場合について相平面を考察してみよう．

λ を多項式 (18) の実根とし，それに対応する固有ベクトルを $h=(h^1, h^2)$ とする．そうすると(系 (17) の形から)

$$h^2=\lambda h^1$$

となり，したがって固有値 λ に対応する固有方向は方程式

$$y=\lambda x$$

によってあらわされる直線によって決定される．これを**固有直線**とよぶことにする．

もし根 λ_1 と λ_2 とが負であれば，(0,0) は安定結節点である (A] を見よ)．この場合には，固有直線は 2 本とも第 2，第 4 象限をとおる．そして原点の近傍では軌道はこれら 2 本の直線のうちで横軸に近いものに接する(図 34)．

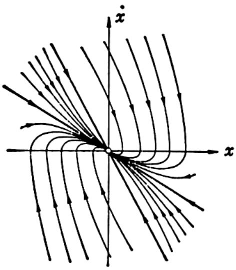


図 34

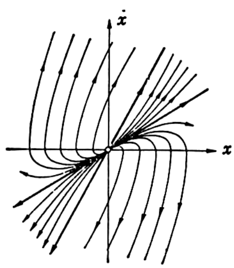


図 35

もし根 λ_1 と λ_2 とが正であれば，(0,0) は不安定結節点である (A] を見よ) このとき固有直線は 2 本とも第 1，第 3 象限をとおり，軌道は原点の近傍でこれら 2 本の直線のうちの横軸に近いものに接する(図 35)．

もし根 λ_1 と λ_2 とが異符号であれば，(0,0) は鞍形点である．この場合には，1 本の固有直線は第 2，第 4 象限をとおり，もう 1 本は第 1，第 3 象限をとおる．そして軌道は，これらの直線のうちの前者にそっては原点に近づき，後者にそっては原点から遠ざかっていく(図 36)．

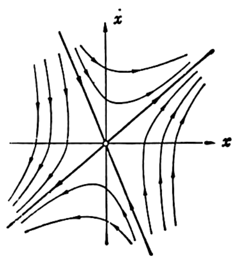


図 36

3. 最後に，行列 A の固有値のうち少なくとも 1 つが 0 になる場合を考えよう．

第 I の場合 固有値のうちの 1 つだけが 0 になる：

$$\lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2=0.$$

このときには解は (4) の形に書ける．ただし ξ^1, ξ^2 は (5) によって与えられる．

$\lambda_2=0$ であるから $\xi^2=$定数となり，動点の運動は λ_1 の符号によって $\xi^2=$定数という直線上を直線 $\xi^1=0$ に向かっていくか，またはこの直線から遠ざかる．直線 $\xi^1=0$ 上の点はすべて平衡点である(図 37)*)．

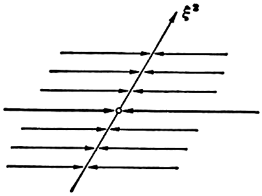


図 37

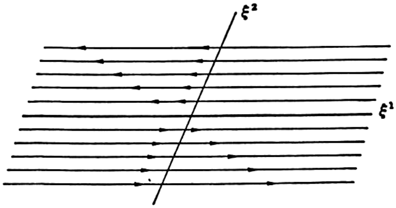


図 38

第 II の場合　2つの固有値がともに 0 である：

$$\lambda_1=\lambda_2=0.$$

このときには，例1で考えたつぎの2つの場合がおこりうる．

a)　((11) を見よ．$\lambda=0$)．一般解はつぎのようになる((13) を見よ)：

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0.$$

この場合がおこるのは，系（1）のすべての係数が0のときであり，平面 P の各点が平衡点となる．

b)　((12) を見よ．$\lambda=0$)．一般解はつぎのようになる((14) を見よ)：

$$\xi^1=c^1+c^2t,\qquad \xi^2=c^2.$$

この場合，動点の運動はどの直線($\xi^2=$定数)上でも等速度であり，直線 $\xi^2=0$ 上の点はすべて平衡点である(図 38)．

*) 訳注：図 37 には $\lambda_1<0$ の場合だけがえがかれている．縦軸の左側にえがかれているのが $c^1<0$ の場合の軌道，右側は $c^1>0$ の場合である．

第 3 章

変係数の線形方程式

この章では線形方程式の理論を，はじめに n 階の正規系に対して，つぎに単独の n 階方程式に対して述べる．なお単独の方程式に関する結果はほとんどすべて，これに対応する正規系の結果からみちびかれる．§19 では周期係数の正規線形同次系が考察され，主要な結果としてリャプーノフ（Ляпунов）の定理が証明される．この定理は周期係数の正規系を変数の周期的な1次変換によって定係数の正規系に変換できることを主張するものであって，あとで述べる安定性の理論に応用される重要なものである．その証明はごく簡単であるが，あまり初等的でない《行列の関数》の理論にもとづいている．この理論は常微分方程式論の範囲外なので，代数的な補足として読者のために補章Ⅱに述べておいた．このように，§19 の内容は行列の解析を利用するため初等的とはいえない．

§17. 正規形の線形方程式系

ここでは，正規形の変係数線形方程式系

$$\dot{x}^i=\sum_{j=1}^{n}a^i_j(t)x^j+b^i(t), \qquad i=1, \cdots\cdots, n, \tag{1}$$

を考察する．系（1）の係数 $a^i_j(t)$ と自由項 $b^i(t)$ とが区間 $q_1<t<q_2$ で定義されかつこの区間で連続であれば，定理3により，系（1）の任意の解は区間 $q_1<t<q_2$ 全体に延長される．以後，考える解はすべてこの区間で存在し，かつ t はこの区間に属しているものとする．

解の基本系

まずはじめに，同次方程式系

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^{n} a_j^i(t) x^j, \qquad i=1, \cdots\cdots, n, \tag{2}$$

を考察することにする．（2）をベクトルの記法によって

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x} \tag{3}$$

と書く．

A〕 方程式（3）の最も簡単な性質を述べよう．

a） 解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ がある値 t_0 に対して $\mathbf{0}$ になれば，すなわち

$$\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \mathbf{0} \tag{4}$$

ならば，この解は恒等的に $\mathbf{0}$ に等しい．すなわち

$$\boldsymbol{\varphi}(t) \equiv \mathbf{0}, \qquad q_1 < t < q_2.$$

b） ベクトル関数

$$\boldsymbol{\varphi}_1(t),\ \boldsymbol{\varphi}_2(t), \cdots\cdots, \boldsymbol{\varphi}_r(t)$$

が方程式（3）の解であれば，任意の定数 $c^1, \cdots\cdots, c^r$ に対して，

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = c^1\boldsymbol{\varphi}_1(t) + \cdots\cdots + c^r\boldsymbol{\varphi}_r(t)$$

もまた方程式（3）の解である．

性質**b**）はただちにわかる．また恒等的に $\mathbf{0}$ に等しいベクトル関数 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ は明らかに方程式（3）の解であるから，それはこの解と同じ初期条件（4）をもつ解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ と一致するはずである．これで性質 **a**）が証明された．

B〕

$$\boldsymbol{\varphi}_1(t),\ \boldsymbol{\varphi}_2(t), \cdots\cdots, \boldsymbol{\varphi}_r(t) \tag{5}$$

を方程式（3）の解の系とする．これが**1次従属**であるというのは，同時には0でないような定数 $c^1, c^2, \cdots\cdots, c^r$ が存在して，

$$c^1\boldsymbol{\varphi}_1(t) + c^2\boldsymbol{\varphi}_2(t) + \cdots\cdots + c^r\boldsymbol{\varphi}_r(t) \equiv \mathbf{0}$$

となることである．そうでない場合には，方程式（3）の解の系（5）は**1次独立**であるという．

少なくとも1つの値 $t=t_0$ に対して，ベクトル

$$\boldsymbol{\varphi}_1(t_0), \quad \boldsymbol{\varphi}_2(t_0), \cdots\cdots, \boldsymbol{\varphi}_r(t_0) \tag{6}$$

が1次従属であれば，解（5）は1次従属である．いいかえれば，解の系（5）が1次独立の場合には，t のどんな値に対してもベクトル（5）は1次従属に

なりえない．これを証明しよう．ベクトル（6）が1次従属，すなわち

$$c^1\varphi_1(t_0)+\cdots\cdots+c^r\varphi_r(t_0)=\mathbf{0}$$

であったとしよう．ただし $c^1, \cdots\cdots, c^r$ の中には0でない数がある．

$$\varphi(t)=c^1\varphi_1(t)+\cdots\cdots+c^r\varphi_r(t)$$

とおくと，A］の b）によって，ベクトル関数 $\varphi(t)$ は方程式（3）の解である．一方，この関数は $t=t_0$ のとき $\mathbf{0}$ になるから A］の a）によって恒等的に $\mathbf{0}$ に等しい．これで証明された．

つぎに，同次系に対して最も重要な**解の基本系**という概念を定義しよう．

C］ 方程式（3）の解の系

$$\varphi_1(t),\ \varphi_2(t), \cdots\cdots, \varphi_n(t) \tag{7}$$

（ただし n は系（2）の階数）が1次独立の場合，これを**解の基本系**という．このときつぎのことがわかる：a）方程式（3）に対してつねに解の基本系が存在する；b）（7）が方程式（3）の解の基本系であれば，方程式（3）の任意の解 $\varphi(t)$ は，$c^1, \cdots\cdots, c^n$ を定数として，つぎの形に書きあらわされる：

$$\varphi(t)=c^1\varphi_1(t)+c^2\varphi_2(t)+\cdots\cdots+c^n\varphi_n(t). \tag{8}$$

（定係数の線形方程式系に対しては解の基本系はすでに §14 で構成した）．

まずはじめに，方程式（3）の解の基本系が存在することを証明しよう．

$$\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2, \cdots\cdots, \boldsymbol{a}_n$$

を任意の1次独立な定ベクトルとする（ただし n は系（2）の階数）．t_0 を t のある1つの値として，初期条件

$$\varphi_i(t_0)=\boldsymbol{a}_i, \qquad i=1, \cdots\cdots, n,$$

をみたすような解（7）をとる．ベクトル $\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0), \cdots\cdots, \varphi_n(t_0)$ は仮定により1次独立であるから，B］によって解（7）は1次独立すなわち解の基本系をつくる．

つぎに任意の解 $\varphi(t)$ はいずれも（8）の形に書けることをしめそう．解（7）は1次独立であるから，B］によってベクトル $\varphi_1(t_0), \cdots\cdots, \varphi_n(t_0)$ は1次独立である．一方，それらの個数はいま考えているベクトル空間の次元に一致しているから，それらはこの空間の基底をなす．したがってベクトル $\varphi(t_0)$

は，数 $c^1, \cdots\cdots, c^n$ を適当にえらべば，つぎの形に書くことができる：

$$\varphi(t_0)=c^1\varphi_1(t_0)+\cdots\cdots+c^n\varphi_n(t_0). \tag{9}$$

解 $\varphi(t)$ と $c^1\varphi_1(t)+\cdots\cdots+c^n\varphi_n(t)$ とは同じ初期条件をみたしているから((9)を見よ)一致する．すなわち，等式(8)が成り立つ．

こんどは上述の結果をベクトルの成分ごとに書きあらわして，他のいくつかの結果を述べよう．

D]

$$\varphi_1(t), \cdots\cdots, \varphi_n(t) \tag{10}$$

を方程式(3)の解のある系とする．解 $\varphi_k(t)$ を

$$\varphi_k(t)=(\varphi_k^1(t),\ \varphi_k^2(t), \cdots\cdots \varphi_k^n(t))$$

と成分であらわすことにしよう．いま，行列

$$\begin{pmatrix} \varphi_1^1(t) & \cdots\cdots & \varphi_k^1(t) & \cdots\cdots & \varphi_n^1(t) \\ \varphi_1^2(t) & \cdots\cdots & \varphi_k^2(t) & \cdots\cdots & \varphi_n^2(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1^n(t) & \cdots\cdots & \varphi_k^n(t) & \cdots\cdots & \varphi_n^n(t) \end{pmatrix} \tag{11}$$

をつくる．この行列の第 k 列は系(2)の解 $\varphi_k(t)$ である．この行列の行列式を $W(t)$ であらわし，これを解の系(10)の**ロンスキー**(Wronski)**行列式**という．解(10)が1次独立であれば，明らかに t のいかなる値に対してもロンスキー行列式は0にならない．このとき(10)はもちろん解の基本系である．また系(10)が1次従属であれば，ロンスキー行列式は恒等的に0に等しい．(10)が解の基本系であるとき，行列(11)を**基本行列**と名づけることにする．つぎに変数 t の関数を要素とする n 次の正方行列はある自然な条件のもとで，(2)の形をしたある方程式系に対する基本行列になることを証明しよう．

E] 行列(11)は区間 $q_1<t<q_2$ で連続微分可能な関数を要素とする行列で，この区間のいたるところでその行列式が0にならないものと仮定する．そのとき，この行列(11)は区間 $q_1<t<q_2$ で定義されたある(ただ1つの)方程式系(2)の基本行列になる．

これを証明するため，行列(11)の第 k 列の要素を成分とするベクトル関数 $\varphi_k(t)$ が方程式(3)をみたしていると考えて，これを式に書きあらわせば

$$\dot{\varphi}_k^i(t)=\sum_{j=1}^{n} a_j^i(t)\varphi_k^j(t), \qquad i,\ k=1,\cdots\cdots,n, \tag{12}$$

となる．ここで添字 i を固定して，添字 k だけが変わると考えれば，この関係式は未知数 $a_1^i(t),\cdots\cdots,a_n^i(t)$ に関する連立1方程式と見なせて，これを一意的に解くことができる．なぜなら，その行列は行列 (11) を転置してえられるもので，その行列式は 0 でないからである．けっきょく，関数 $a_j^i(t)$ は固定された各 i に対して関係式 (12) から一意的に求まり，しかも関数 $\dot{\varphi}_k^i(t)$ と $\varphi_k^i(t)$ は連続であるから，それらの関数 $a_j^i(t)$ も連続であることがわかる．

リュービル (Liouville) の公式

あとで，G] を証明する際に行列式の微分法が必要になるので，それをつぎに述べよう．

F] 変数 t の連続微分可能な関数を要素とする n 次の正方行列を $(\varphi_k^i(t))$ とし，その行列式を $W(t)$ とする．この行列式の導関数 $\dot{W}(t)$ はつぎの公式によって与えられる：

$$\dot{W}(t)=W_1(t)+\cdots\cdots+W_n(t). \tag{13}$$

ただし，この等式の右辺の i 番目にある項 $W_i(t)$ は，行列 $(\varphi_j^i(t))$ の第 i 行の各要素を微分し，その他の行はそのままにしてえられる行列の行列式である．明らかに，行と列の役割を交換してもよい．

公式 (13) を証明するため，まず n 次の正方行列 (u_j^i) の行列式 U はすべての要素 u_j^i $(i,j=1,\cdots\cdots,n)$ を独立変数とする関数であると考える．いま r,s を任意に固定して，変数 u_s^r に関する U の偏導関数

$$\frac{\partial U}{\partial u_s^r}$$

を計算してみよう．行列 (u_j^i) の要素 u_j^i の余因数を V_i^j であらわせば

$$U=\sum_{j=1}^{n} u_j^r V_r^j. \tag{14}$$

この式は行列式 U を r 番目の行について展開したものである．余因数 V_r^j は変数 u_s^r を含まないから，等式 (14) を u_s^r について微分すれば，次式がえられる：

$$\frac{\partial U}{\partial u_s^r}=V_r^s. \tag{15}$$

$u_j^i=\varphi_j^i(t)$ とおけば，$U=W(t)$．$W(t)$ を合成関数と考えて微分すれば，等式 (15) によって

$$\dot{W}(t)=\sum_{i,j}\frac{\partial U}{\partial u_j^i}\cdot\dot{\varphi}_j^i(t)=\sum_{i,j}\dot{\varphi}_j^i(t)V_j^i=\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n\dot{\varphi}_j^i(t)V_i^j\right)$$

となる．明らかに

$$\sum_{j=1}^n\dot{\varphi}_j^i(t)V_i^j=W_i(t)$$

であるから，公式 (13) が証明された．

つぎに，いわゆる**リュービルの公式**を証明しよう．

G] 方程式（2）の解の基本系のロンスキー行列式を $W(t)$ とする．このとき，つぎの公式が成立する：

$$W(t)=W(t_0)e^{\int_{t_0}^t S(\tau)d\tau} \tag{16}$$

ここに $S(t)$ は行列 $A(t)$ のシュプール（行列の対角線要素の和）である：

$$S(t)=a_1^1(t)+a_2^2(t)+\cdots\cdots+a_n^n(t).$$

公式 (16) を証明するため，ロンスキー行列式がみたす微分方程式を導入しよう．

それには，公式 (13) によって，まず導関数 $\dot{W}(t)$ を計算する．見とおしのきく方法で計算するため，行列 (11) の行はベクトルであると考える．すなわちつぎのようにおく：

$$\boldsymbol{x}^i(t)=(\varphi_1^i(t),\cdots\cdots,\varphi_n^i(t)),\qquad i=1,\cdots\cdots,n.$$

こうすれば，(12) はつぎの形に書ける：

$$\dot{\boldsymbol{x}}^i(t)=a_1^i(t)\boldsymbol{x}^1(t)+\cdots\cdots+a_n^i(t)\boldsymbol{x}^n(t). \tag{17}$$

この関係は行列 (11) の第 i 行の導関数はこの行列の行の1次結合であることをしめしている．したがって行列式 $W_i(t)$ を計算するには，行列式 $W(t)$ の第 i 行をこの行列の n 個の行の1次結合である (17) によっておきかえればよい．ところが，行列のある行に他の行の何倍かを加えてもその行列式の値は変

わらないから，行列式 $W_i(t)$ は行列式 $W(t)$ の第 i 行に $a_i^i(t)$ をかけたものになる．すなわち

$$W_i(t)=a_i^i(t)W(t).$$

けっきょく，公式 (13) から

$$\dot{W}(t)=S(t)W(t)$$

となる．この方程式の解で初期条件

$$W(t)|_{t=t_0}=W(t_0)$$

をみたすものは (16) だけである．これでリュービルの公式が証明された．

定 数 変 化 法

こんどは，非同次系を考察することにしよう．非同次系（1）をベクトルの記法によって

$$\dot{\boldsymbol{y}}=A(t)\boldsymbol{y}+\boldsymbol{b}(t) \tag{18}$$

とかき，$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\phi}(t)$ をこの方程式の1つの解とする．方程式 (18) とともにそれに付随する同次方程式（3）を考える．§6 の注意からただちにわかるように，方程式 (18) の任意の解はつぎの形に書ける：

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\varphi}(t)+\boldsymbol{\phi}(t),$$

ただし $\boldsymbol{\varphi}(t)$ は方程式（3）の解である．

したがって非同次方程式 (18) を解くことは，この方程式の特殊解を求めることと，付随する同次方程式を解くこととに帰着する．つぎに同次方程式（3）の解の基本系を知って，非同次方程式の特殊解を（求積法によって）求める方法を説明しよう．

H］ 定数変化法 同次方程式（3）の解の基本系を

$$\boldsymbol{\varphi}_1(t),\cdots\cdots,\boldsymbol{\varphi}_n(t)$$

とする．方程式 (18) の解を

$$\boldsymbol{y}=c^1(t)\boldsymbol{\varphi}_1(t)+\cdots\cdots+c^n(t)\boldsymbol{\varphi}_n(t) \tag{19}$$

の形で求めてみよう．ただし係数は t の未知関数である．この $\boldsymbol{y}$ を方程式 (18) に代入すれば，つぎのようになる：

$$\dot{c}^1(t)\boldsymbol{\varphi}_1(t)+\cdots\cdots+\dot{c}^n(t)\boldsymbol{\varphi}_n(t)+c^1(t)\dot{\boldsymbol{\varphi}}_1(t)+\cdots\cdots+c^n(t)\dot{\boldsymbol{\varphi}}_n(t)$$

$$=A(t)(c^1(t)\varphi_1(t)+\cdots\cdots+c^n(t)\varphi_n(t))+\boldsymbol{b}(t).$$

これより，$\varphi_1(t),\cdots\cdots,\varphi_n(t)$ が方程式（3）の解であることに注意して，

$$\dot{c}^1(t)\varphi_1(t)+\cdots\cdots+\dot{c}^n(t)\varphi_n(t)=\boldsymbol{b}(t) \tag{20}$$

がえられる．$\varphi_1(t),\cdots\cdots,\varphi_n(t)$ は各点 t において1次独立なベクトルであるから，関係式 (20) から値 $\dot{c}^1(t),\cdots\cdots,\dot{c}^n(t)$ は一意的にきまり，けっきょく，$c^1(t),\cdots\cdots,c^n(t)$ は求積法によって求められる．$\dot{c}^1(t),\cdots\cdots,\dot{c}^n(t)$ に関する方程式 (20) を成分ごとに書けば，つぎのようになる：

$$\sum_{j=1}^{n}\varphi_j^i(t)\dot{c}^j(t)=b^i(t),\qquad i=1,\cdots\cdots,n. \tag{21}$$

I］ $\Phi(t)=(\varphi_j^i(t))$ を方程式（3）の基本行列とし，$t=t_0$ のときに単位行列になるものとする．そうすれば非同次方程式 (18) の解で初期値 t_0, $\boldsymbol{y}_0$ をもつものはつぎの形に書ける：

$$\boldsymbol{y}=\Phi(t)\left(\boldsymbol{y}_0+\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(\tau)\boldsymbol{b}(\tau)d\tau\right) \tag{22}$$

ここに $\Phi^{-1}(t)$ は行列 $\Phi(t)$ の逆行列である．

公式 (22) から $t=t_0$ のとき $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}_0$ となることはただちにわかる．公式 (22) が方程式 (18) の解であることも，(22) を (18) に直接代入することによってたしかめられるが，公式 (22) を定数変化法によってみちびくこともできる．実際，等式 (21) はベクトルの記法をもちいてつぎの形に書き換えられる：

$$\Phi(t)\dot{\boldsymbol{c}}(t)=\boldsymbol{b}(t).$$

これより

$$\dot{\boldsymbol{c}}(t)=\Phi^{-1}(t)\boldsymbol{b}(t)\quad ゆえに\quad \boldsymbol{c}(t)=\int\Phi^{-1}(\tau)\boldsymbol{b}(\tau)d\tau. \tag{23}$$

また，等式 (19) は成分ごとに書きあらわせば

$$y^i(t)=\sum_{j=1}^{n}\varphi_j^i(t)c^j(t),\qquad i=1,\cdots\cdots,n,$$

となるが，ベクトルの記法をもちいれば

$$\boldsymbol{y}=\Phi(t)\boldsymbol{c}(t)$$

となる．この式に (23) の $\boldsymbol{c}(t)$ を代入すれば

$$\boldsymbol{y}=\Phi(t)\int\Phi^{-1}(\tau)\boldsymbol{b}(\tau)d\tau \tag{24}$$

がえられる．したがって，(24) は方程式 (18) の解を（また (22) は特殊解を）与える公式である．

線形方程式系の行列によるあらわしかた

方程式（3）の基本行列を未知行列として方程式（3）を行列をもちいてあらわすのが便利な場合が多い．

J］（7）を方程式（3）の解の基本系とする．すなわち，

$$\dot{\varphi}^i_j(t)=\sum_{\alpha=1}^n a^i_\alpha(t)\varphi^\alpha_j(t), \qquad i, j=1, \cdots\cdots, n.$$

この関係を行列をもちいてあらわせば，つぎのようになる：

$$\dot{\Phi}(t)=A(t)\Phi(t). \tag{25}$$

ここに $\dot{\Phi}(t)$ は基本行列 $\Phi(t)=(\varphi^i_j(t))$ の t に関する導関数，すなわち $\dot{\Phi}(t)=(\dot{\varphi}^i_j(t))$ である．このように，方程式（3）の基本行列は行列方程式 (25) をみたす．さらに，X を未知行列とする行列方程式

$$\dot{X}=A(t)X \tag{26}$$

の任意の解は，行列 X の行列式が 0 でなければ，方程式（3）の基本行列である．以後，方程式 (26) の解といえば，(26) をみたすような行列 X でその行列式が 0 でないものだけを考えることにする．明らかに，行列方程式 (26) の 1つの解を求めることは，方程式（3）のすべての解を求めることと同値である．とくに，$X=\Phi(t)$ と $X=\hat{\Phi}(t)$ とが行列方程式 (26) の 2つの解であれば，定数行列 P が存在して

$$\hat{\Phi}(t)=\Phi(t)P \tag{27}$$

となる．

この関係を証明しよう．

$$\Phi(t)=(\varphi^i_j(t)), \qquad \hat{\Phi}(t)=(\hat{\varphi}^i_j(t))$$

$$\boldsymbol{\varphi}_j(t)=(\varphi^1_j(t), \cdots\cdots, \varphi^n_j(t)), \qquad \hat{\boldsymbol{\varphi}}_j(t)=(\hat{\varphi}^1_j(t), \cdots\cdots, \hat{\varphi}^n_j(t))$$

とすれば,

$$\varphi_1(t),\ \cdots\cdots,\ \varphi_n(t) \tag{28}$$

は方程式（3）の解の基本系であり，一方 $\hat{\varphi}_j(t)$ もやはり方程式（3）の解であるから，これは基本系 (28) によってあらわされ，つぎのようになる：

$$\hat{\varphi}_j(t)=\sum_{\alpha=1}^{n} p_j^{\alpha}\varphi_{\alpha}(t), \qquad j=1,\ \cdots\cdots,\ n.$$

この関係を成分ごとに書けば,

$$\hat{\varphi}_j^i(t)=\sum_{\alpha=1}^{n}\varphi_{\alpha}^i(t)p_j^{\alpha} \tag{29}$$

となる．$P=(p_j^i)$ とすれば，(27) は関係式 (29) の行列による表現にほかならない．

K] $S(t)=(s_j^i(t))$ を t を変数とする退化しない行列とし,

$$\boldsymbol{y}=S(t)\boldsymbol{x} \tag{30}$$

によって方程式（3）にあたらしい未知ベクトル $\boldsymbol{y}$ を導入する．このとき未知ベクトル関数 $\boldsymbol{y}$ に関する方程式はつぎのようになる：

$$\dot{\boldsymbol{y}}=(\dot{S}(t)+S(t)A(t))S^{-1}(t)\boldsymbol{y}. \tag{31}$$

すなわち，あらたにえられた方程式はやはり（3）と同じ形の方程式である．またベクトルの変換 (30) には，行列の変換

$$Y=S(t)X \tag{32}$$

が対応する（**J**] を見よ）

これを証明しよう．まず,

$$\dot{\boldsymbol{y}}=\frac{d}{dt}(S(t)\boldsymbol{x})=\dot{S}(t)\boldsymbol{x}+S(t)\dot{\boldsymbol{x}}=(\dot{S}(t)+S(t)A(t))\boldsymbol{x}$$

$$=(\dot{S}(t)+S(t)A(t))S^{-1}(t)\boldsymbol{y}$$

となるから，未知ベクトル $\boldsymbol{y}$ に関する方程式 (31) がえられる．

つぎに，未知ベクトルの変換 (30) には未知行列の変換 (32) が対応することをしめそう．変換 (30) を成分ごとに書きかえると

$$y^i=\sum_{\alpha=1}^{n}s_{\alpha}^i(t)x^{\alpha}$$

となる．方程式（3）の解の基本系のベクトル $\varphi_j(t)=(\varphi_j^1(t), \cdots\cdots, \varphi_j^n(t))$ には，変換 (30) によって，ベクトル $\psi_j(t)=(\psi_j^1(t), \cdots\cdots, \psi_j^n(t))$ が対応する．ただし

$$\psi_j^i(t)=\sum_{\alpha=1}^{n} s_\alpha^i(t)\varphi_j^\alpha(t)$$

である．したがって方程式（3）の基本行列 $\Phi(t)$ には，方程式 (31) の基本行列 $\Psi(t)$ が関係式

$$\Psi(t)=S(t)\Phi(t)$$

によって対応する．これは，未知行列が (32) 式によって変換されることをしめすものにほかならない．

例

C］からわかるように，方程式（3）のすべての解を求めるには，その解の基本系すなわち n 個の1次独立な解を求めればよい．つぎに，系（2）の恒等的には0でない1つの解がわかれば，系（2）の階数を1だけひき下げられることを，すなわち系（2）を $n-1$ 階の線形方程式系を解くことに帰着できることをしめそう．

$$\varphi(t)=(\varphi^1(t), \cdots\cdots, \varphi^n(t))$$

を方程式（3）すなわち系（2）の解とする．方程式（3）の解を

$$x=u\varphi(t)+y \tag{33}$$

の形で求めてみよう．ただし u は未知関数，y は第1成分が0であるような未知ベクトルすなわち

$$y=(0, y^2, \cdots\cdots, y^n)$$

とする．(33) のベクトル x を方程式（3）に代入すると，つぎのようになる：

$$\dot{u}\varphi(t)+u\dot{\varphi}(t)+\dot{y}=A(t)(u\varphi(t)+y).$$

$\varphi(t)$ は方程式（3）の解であることに注意すれば，上式は

$$\dot{u}\varphi(t)+\dot{y}=A(t)y$$

となる．この方程式を成分ごとに書きあらわし，第1成分だけを他の方程式と区別すると

$$\dot{u}\varphi^1(t)=\sum_{j=2}^{n} a_j^1(t)y^j, \tag{34}$$

$$\dot{y}^i=\sum_{j=2}^{n} a_j^i(t)y^j-\dot{u}\varphi^i(t), \qquad i=2, \cdots\cdots, n. \tag{35}$$

$\dot{u}$ を方程式 (34) から求めて，これを関係式 (35) に代入すれば，次式がえられる：

$$\dot{y}^i=\sum_{j=2}^{n} b_j^i(t)y^j, \qquad i=2,\cdots\cdots,n. \tag{36}$$

ここに

$$b_j^i(t)=a_j^i(t)-\frac{\varphi^i(t)}{\varphi^1(t)}a_j^1(t).$$

$\dot{u}$ を (34) から (35) に代入できるのは，関数 $\varphi^1(t)$ が 0 にならないような区間においてのみ許されることを忘れてはならない．$\boldsymbol{\psi}(t)=\{\psi^2(t),\cdots\cdots,\psi^n(t)\}$ が系 (36) の解であれば，関数 u は関係式

$$\dot{u}\varphi^1(t)=\sum_{j=2}^{n} a_j^1(t)\psi^j(t)$$

から求積法によって求められ，けっきょく，最初の系（2）の解が

$$\boldsymbol{x}=u\boldsymbol{\varphi}(t)+\boldsymbol{\psi}(t)$$

の形で求まる．

§18.　n 階線形方程式

ここでは，n 階線形方程式

$$y^{(n)}+a_1(t)y^{(n-1)}+\cdots\cdots+a_n(t)y=b(t) \tag{1}$$

を考察する．係数 $a_i(t)$ および自由項 $b(t)$ は区間 $q_1<t<q_2$ で定義され，かつ連続であると仮定する．なお，§4 で述べた方法によって（1）を正規形の線形方程式系に帰着させて考察する．

解の基本系

A］ 方程式（1）を正規形の線形系にするため，

$$x^1=y,\quad x^2=\dot{y},\ \cdots\cdots,\ x^n=y^{(n-1)}$$

によってあたらしい未知関数 $x^1,\cdots\cdots,x^n$ を導入する．これらのあたらしい未知関数 $x^1,\cdots\cdots,x^n$ はつぎの線形系をみたす（§4 の **A］** を見よ）：

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{x}^1=x^2,\\
&\dot{x}^2=x^3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\dot{x}^{n-1}=x^n,\\
&\dot{x}^n=-a_n(t)x^1-a_{n-1}(t)x^2-\cdots\cdots-a_1(t)x^n+b(t).
\end{aligned}\right\}$$

この方程式系をベクトルの記法によって書きあらわすと，つぎのようになる：

$$\dot{\boldsymbol{x}}=A(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}(t). \tag{2}$$

ただし

$$A(t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots\cdots\cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \cdots\cdots\cdots\cdots & -a_1(t) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

かつ $\boldsymbol{b}(t)$ はつぎのようなベクトルである：

$$\boldsymbol{b}(t)=(0, 0, \cdots\cdots, b(t)).$$

方程式（1）と（2）とは互いに同値である．すなわち，方程式（1）の任意の解 $y=\psi(t)$ には，方程式（2）の解

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)=(\psi(t), \dot{\psi}(t), \cdots\cdots, \psi^{(n-1)}(t))$$

が対応し，逆に，方程式（2）の任意の解

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)=(\varphi^1(t), \varphi^2(t), \cdots\cdots, \varphi^n(t))$$

には，方程式（1）の解

$$y=\varphi^1(t)$$

が対応して，この対応は1対1である．方程式（1）の解 $\psi(t)$ と方程式（2）の解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ とが上の意味で互いに対応している場合に，

$$\psi(t)\rightleftharpoons\boldsymbol{\varphi}(t)$$

と書くことにする．方程式（1）と（2）とが同値なことから，とくに方程式（1）の任意の解は区間 $q_1<t<q_2$ 全体にまで延長されることがわかる（定理3を見よ）．したがって以後においては，方程式（1）の解はいずれもこの区間で存在していると考える．

はじめに，同次方程式

$$y^{(n)}+a_1(t)y^{(n-1)}+\cdots\cdots+a_n(t)y=0 \tag{4}$$

を考察しよう．方程式（4）に対応する正規系をベクトルの記法によって

$$\dot{\boldsymbol{x}}=A(t)\boldsymbol{x} \tag{5}$$

と書く．ただし $A(t)$ は行列（3）である．

B］ $$\psi_1(t),\ \psi_2(t),\ \cdots\cdots,\psi_r(t) \tag{6}$$

を方程式（4）の解とする．ただちにわかるように，$c^1,\cdots\cdots,c^r$ が定数ならば，関数

$$\psi(t)=c^1\psi_1(t)+\cdots\cdots+c^r\psi_r(t)$$

も方程式（4）の解である．解（6）が1次従属であるというのは，同時には0でないような定数 $c^1,\cdots\cdots,c^r$ が存在して

$$c^1\psi_1(t)+\cdots\cdots+c^r\psi_r(t)\equiv 0 \tag{7}$$

となることである．解（6）に対応する方程式（5）の解を

$$\varphi_1(t),\cdots\cdots,\varphi_r(t) \tag{8}$$

とすれば，すなわち

$$\psi_i(t)\Longleftrightarrow\varphi_i(t),\qquad i=1,\cdots\cdots,r,$$

ならば（**A**］を見よ），解（8）が1次従属になるのは（§17 の **B**］を見よ）解（6）が1次従属の場合であり，かつこの場合にかぎる．

これを証明しよう．解（6）が1次従属すなわち関係式（7）が成り立っているとする．（7）式およびこれを微分してえられる関係式を書けば，つぎのようになる：

$$\left.\begin{array}{l} c^1\psi_1(t)+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+c^r\psi_r(t)=0,\\ c^1\dot{\psi}_1(t)+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+c^r\dot{\psi}_r(t)=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ c^1\psi_1{}^{(n-1)}(t)+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+c^r\psi_r{}^{(n-1)}(t)=0. \end{array}\right\} \tag{9}$$

いま

$$\varphi_i(t)=(\psi_i(t),\ \dot{\psi}_i(t),\cdots\cdots,\psi_i^{(n-1)}(t))$$

に注意して（9）をベクトルの記法によって書けば，つぎのようになる：

$$c^1\varphi_1(t)+\cdots\cdots+c^r\varphi_r(t)=0. \tag{10}$$

したがって解（8）は1次従属である．こんどは逆に，解（8）が1次従属すなわち関係（10）が成り立っているとしよう．（10）において各ベクトル $\varphi_i(t)$ の第1成分に着目すれば，（7）がえられる．ゆえに解（6）は1次従属である．

C］ 方程式（4）の n 個の解

$$\psi_1(t), \cdots\cdots, \psi_n(t) \tag{11}$$

が1次独立の場合，これを**基本系**という（添字からすでにわかるように，系 (11) の解の個数は方程式（4）の階数に等しい）. (11) が方程式（4）の解の基本系ならば，（4）の任意の解は $c^1, \cdots\cdots, c^n$ を定数として

$$\psi(t)=c^1\psi_1(t)+\cdots\cdots+c^n\psi_n(t)$$

の形に書くことができる．このことから，方程式（4）のすべての解を求めるには，解の基本系を見つければよいことになる．（定係数の線形同次方程式に対する解の基本系はすでに §7, 8 で構成した）.

まずはじめに，方程式（4）の解の基本系が存在することをしめそう．それには，方程式（5）の解の基本系が存在することを利用する（§17 の **C**］を見よ）．方程式（5）の解の基本系を

$$\boldsymbol{\varphi}_1(t), \cdots\cdots, \boldsymbol{\varphi}_n(t) \tag{12}$$

とし，またこれに対応する方程式（4）の解を（**A**］を見よ）

$$\psi_1(t), \cdots\cdots, \psi_n(t) \tag{13}$$

とする．すなわち

$$\psi_i(t) \rightleftarrows \boldsymbol{\varphi}_i(t), \qquad i=1, \cdots\cdots, n.$$

解 (12) は1次独立であるから，**B**］によって解 (13) もまた1次独立すなわち基本系である．こんどは (11) を方程式（4）の解の基本系とし，これに対応する解が (12) であったとする．さらに方程式（4）の任意の解を $\psi(t)$, これに対応する方程式（5）の解を $\boldsymbol{\varphi}(t)$ とする．仮定より (11) は基本系すなわち1次独立であるから，これに対応する系 (12) も1次独立すなわち基本系である．ゆえに，§17 の **C**］によって

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=c^1\boldsymbol{\varphi}_1(t)+\cdots\cdots+c^n\boldsymbol{\varphi}_n(t)$$

がえられる．この関係式の第1成分に注目すれば

$$\psi(t)=c^1\psi^1(t)+\cdots\cdots+c^n\psi_n(t)$$

がえられる．これで **C**］が証明された．

D］ 行列式

$$W(t)=\begin{vmatrix} \psi_1(t) & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \psi_n(t) \\ \dot{\psi}_1(t) & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \dot{\psi}_n(t) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \psi_1^{(n-1)}(t) & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \psi_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} \tag{14}$$

を方程式（4）の解の系 (11) の**ロンスキー** (Wronski) 行列式という．解 (11) に方程式（5）の解 (12) が対応している（**A**］を見よ）ならば，明らかに方程式（5）の解の系 (12) のロンスキー行列式（§17 の **D**］を見よ）は行列式 (14) に一致する．したがって系 (12) のロンスキー行列式に対して成り立つことがらは，行列式 (14) に対しても成り立つ．このことから，§17 の **D**］によってつぎのことが結論される：行列式 (14) はいたるところで 0 にならないか，または恒等的に 0 に等しい；解の系 (11) が 1 次独立すなわち基本系であるためには，行列式 (14) が 0 にならないことが必要かつ十分である．§17 の **G**］から，行列式 (14) に対するリュービルの公式：

$$W(t)=W(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(\tau)d\tau} \tag{15}$$

が出てくる．これは，行列（3）の対角線要素の和が $-a_1(t)$ に等しいことに注意すれば，§17 の公式 (16) からすぐにえられる．下の例 2 では公式 (15) のもっと簡単な直接の証明を与える．

E］
$$z^{(n)}+a_1(t)z^{(n-1)}+\cdots\cdots+a_n(t)z=b(t) \tag{16}$$

を非同次方程式，またこれに対応する同次方程式を

$$y^{(n)}+a_1(t)y^{(n-1)}+\cdots\cdots+a_n(t)y=0 \tag{17}$$

とする．§6 の命題からすぐにわかるように，$\chi_0(t)$ が方程式 (16) の特殊解であれば，方程式 (16) の任意の解はつぎの形に書ける：

$$z=\psi(t)+\chi_0(t),$$

ここに $\psi(t)$ は方程式 (17) の解である．

定 数 変 化 法

F］ 方程式 (17) の解の基本系の 1 つを

$$\psi_1(t), \cdots\cdots, \psi_n(t) \tag{18}$$

とする．このとき，方程式 (16) の解 z は

$$z = c^1(t)\psi_1(t) + \cdots\cdots + c^n(t)\psi_n(t) \tag{19}$$

の形でえられる．ただし関数

$$\dot{c}^1(t), \cdots\cdots, \dot{c}^n(t) \tag{20}$$

はつぎの連立1次方程式の解である：

$$\left.\begin{aligned}
&\psi_1(t)\dot{c}^1(t) + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \psi_n(t)\dot{c}^n(t) = 0, \\
&\dot{\psi}_1(t)\dot{c}^1(t) + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \dot{\psi}_n(t)\dot{c}^n(t) = 0, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\psi_1^{(n-2)}(t)\dot{c}^1(t) + \cdots\cdots\cdots + \psi_n^{(n-2)}(t)\dot{c}^n(t) = 0, \\
&\psi_1^{(n-1)}(t)\dot{c}^1(t) + \cdots\cdots\cdots + \psi_n^{(n-1)}(t)\dot{c}^n(t) = b(t).
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

(20) を未知数とする連立1次方程式 (21) の係数の行列式は解の基本系 (18) のロンスキー行列式であるから，D] によって，t のどんな値に対しても 0 にならない．ゆえに，連立方程式 (21) から (20) が求まる．そうすれば，関数

$$c^1(t), \cdots\cdots, c^n(t)$$

は (20) を積分してえられる．

この命題の証明は §17 の H] からもえられるが，直接に証明してみよう．関数 (20) が条件 (21) をみたしていると仮定すれば，(19) を微分することによってつぎの関係式がえられる：

$$\begin{aligned}
&z = c^1(t)\psi_1(t) + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + c^n(t)\psi^n(t), \\
&\dot{z} = c^1(t)\dot{\psi}_1(t) + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + c^n(t)\dot{\psi}_n(t), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&z^{(n-1)} = c^1(t)\psi_1^{(n-1)}(t) + \cdots\cdots\cdots + c^n(t)\psi_n^{(n-1)}(t), \\
&z^{(n)} = c^1(t)\psi_1^{(n)}(t) + \cdots\cdots\cdots\cdots + c^n(t)\psi_n^{(n)}(t) + \\
&\qquad + \dot{c}^1(t)\psi_1^{(n-1)}(t) + \cdots\cdots\cdots\cdots + \dot{c}^n(t)\psi_n^{(n-1)}(t) \\
&\qquad = c^1(t)\psi_1^{(n)}(t) + \cdots\cdots\cdots\cdots + c^n(t)\psi_n^{(n)}(t) + b(t).
\end{aligned}$$

これらの関係式を方程式 (16) に代入すると恒等式がえられるから，関数 $c^1(t)$, $\cdots\cdots, c^n(t)$ が条件 (21) をみたせば，関数 (19) は方程式 (16) の解である．

例

1. 方程式（4）の恒等的には0でないような1つの解 $\psi(t)$ がわかっていれば，この方程式の階数を1だけ引き下げることができる．すなわち（4）を解くことは，$n-1$ 階の線形方程式を解くことに帰着する．これを証明するには，v をあたらしい未知関数と考えてつぎのような変換をおこなう：

$$y=\psi(t)v. \tag{22}$$

(22) を方程式（4）の左辺に代入すると，v に関する方程式

$$b_0(t)v^{(n)}+b_1(t)v^{(n-1)}+\cdots\cdots+b_{n-1}(t)\dot{v}+b_n(t)v=0 \tag{23}$$

がえられ，かつ

$$b_0(t)=\psi(t),\quad b_n(t)\equiv 0 \tag{24}$$

となる．われわれがいままで n 階の方程式に対して述べてきたことがらはすべて n 階の導関数の係数が1の場合だけであったから，方程式 (23) にいままでの結果を適用するには両辺を $b_0(t)\equiv\psi(t)$ で割る必要がある．そのためには，$\psi(t)$ が0にならないような区間だけを考える．このとき

$$\frac{b_i(t)}{\psi(t)}=l_i(t)$$

とおき，未知関数 v をあたらしい未知関数

$$w=\dot{v}$$

でおきかえれば，$n-1$ 階の方程式

$$w^{(n-1)}+l_1(t)w^{(n-2)}+\cdots\cdots+l_{n-1}(t)w=0$$

がえられる．この方程式の解 $\chi(t)$ がわかれば，方程式 (23) の解 v は積分

$$v=\int\chi(t)\,dt$$

によってえられ，方程式（4）の解 y はいまえられた関数 v を (22) に代入することによって求まる．

さて，変換 (22) によって方程式（4）が (23) の形になること，またこのとき関係 (24) が成立することを証明しよう．(22) 式を微分すれば，つぎのようになる．

$$y^{(k)}=\psi(t)v^{(k)}+\cdots\cdots,$$

ここで k より小さい階数の v の導関数を含む項は省略してある．これによって，方程式（4）は (23) の形になり，かつ $b_0(t)=\psi(t)$ であることがわかる．また $\psi(t)$ は方程式（4）の解であるから，$v=1$ は方程式 (23) の解である．解 $v=1$ を (23) に代入すれば，$b_n(t)\equiv 0$ がえられる．これで (24) が証明された．

2. 単独の n 階方程式に対するリュービルの公式 (15) を方程式系に対するリュービルの公式 (§17 の公式 (16)) を使わずに証明してみよう．それには，§17 で述べた行列式の微分法を利用する．この微分法によって，(14) からつぎの関係がえられる：

$$\dot{W}(t)=W_1(t)+\cdots\cdots+W_i(t)+\cdots\cdots+W_n(t).$$

ここに $W_i(t)$ はロンスキー行列式 $W(t)$ の第 i 行を微分し，その他の行はそのままにしておいた行列式である．ところが $i<n$ の場合には，第 i 行を微分すると第 $i+1$ 行がえられるから

$$W_1(t)=W_2(t)=\cdots\cdots=W_{n-1}(t)=0.$$

また，第 n 行を微分すると

$$\psi_1^{(n)}(t),\cdots\cdots,\psi_n^{(n)}(t)$$

がえられるが，方程式（4）に注意すれば，この行は行列式 $W(t)$ の n 個の行の1次結合に等しく，しかもこの1次結合にあらわれる第 n 行の係数は $-a_1(t)$ であることがわかる．行列式 $W_n(t)$ とロンスキー行列式 $W(t)$ とは第1行から第 $n-1$ 行までまったく同じであるから，上の1次結合においてこれらの行は捨てさることができ，けっきょく係数 $-a_1(t)$ のかかった第 n 行だけが残る　ゆえにロンスキー行列式に対して，微分方程式

$$\dot{W}(t)=-a_1(t)\,W(t)$$

がえられる．これを解けばリュービルの公式 (15) をうる．

§19.　周期係数の正規線形同次系

変係数の線形方程式のなかでもとくに重要なのは周期係数の方程式である．この§では周期係数の線形同次微分方程式系のいくつかの性質を述べる．これらの性質のなかでも中心的なのはリャプーノフの定理である．この定理の証明には行列の解析を利用するため，いままで述べてきたことがらにくらべてあまり初等的ではない．これに必要な予備知識はこの本の補章IIに述べてある．

正規形の線形同次方程式系を行列を使って書きあらわしたものを

$$\dot{X}=A(t)X \tag{1}$$

とする（§17 の J］を見よ）．この方程式系の係数は周期 τ の周期関数であると仮定する．すなわち行列 $A(t)$ は条件

$$A(t+\tau)=A(t)$$

をみたすものとする．

A］　方程式（1）のどんな（行列）解（§17 の **J**］を見よ）

$$X=\Phi(t) \tag{2}$$

に対しても，

$$\Phi(t+\tau)=\Phi(t)C$$

となるような(非退化)定数行列 C が存在する．この行列 C を解（2）に対する**基礎行列**とよぶことにする．もし $X=\hat{\varPhi}(t)$ が方程式（1）のもう1つの解でこれに対する基礎行列が $\hat{C}$ ならば，つぎの関係が成り立つ:

$$\hat{C}=P^{-1}CP, \tag{3}$$

ただし P はある非退化行列である．

まず行列 C の存在を証明しよう．解（2）とともに，行列 $\varPhi(t+\tau)$ もまた（1）の解であることは

$$\dot{\varPhi}(t+\tau)=A(t+\tau)\varPhi(t+\tau)=A(t)\varPhi(t+\tau)$$

からわかる．したがって，§17 の (27) 式より

$$\varPhi(t+\tau)=\varPhi(t)C$$

となる．ここに C は定数行列である．

公式（3）を証明するには，ふたたび §17 の (27) 式を使用する．$\varPhi(t)$ は方程式（1）の解であるから，§17 の (27) 式によって

$$\hat{\varPhi}(t)=\varPhi(t)P$$

となる．これより

$$\hat{\varPhi}(t+\tau)=\varPhi(t+\tau)P=\varPhi(t)CP=\hat{\varPhi}(t)P^{-1}CP.$$

これは関係式（3）にほかならない．

B］ 行列 $A(t)$ と同一の周期 τ をもつ周期行列 $B(t)$ を係数とする方程式

$$\dot{Y}=B(t)Y \tag{4}$$

と方程式（1）とが**同等**であるというのは，周期 τ の周期行列 $S(t)$ であらわされる1次変換（§17 の **K**］を見よ）

$$Y=S(t)X$$

が存在して，この変換によって方程式（1）が方程式（4）に変換されることである．方程式（1）と（4）とが同等になるのは，同じ基礎行列をもつような（1），（4）の解 $X=\varPhi(t)$, $Y=\varPsi(t)$ が存在する場合であり，かつその場合にかぎる．

これを証明しよう．はじめに，方程式（1）と（4）とが同等であるとする．$X=\varPhi(t)$ を方程式（1）の任意の解，その基礎行列を C とする．$Y=\varPsi(t)=$

$S(t)\Phi(t)$ は方程式（4）の解で，

$$\Psi(t+\tau)=S(t+\tau)\Phi(t+\tau)=S(t)\Phi(t+\tau)=S(t)\Phi(t)C=\Psi(t)C$$

となるから，解 $\Phi(t)$ の基礎行列 C は解 $\Psi(t)$ の基礎行列でもある．

つぎに，方程式（1），（4）の解で同じ基礎行列をもつものをそれぞれ $X=\Phi(t)$，$Y=\Psi(t)$ とすれば，

$$\Phi(t+\tau)=\Phi(t)C, \qquad \Psi(t+\tau)=\Psi(t)C$$

である．この後者に前者の逆行列を右からかければ，

$$\Psi(t+\tau)\Phi^{-1}(t+\tau)=\Psi(t)\Phi^{-1}(t)$$

となる．したがって行列

$$S(t)=\Psi(t)\Phi^{-1}(t)$$

は周期 τ の周期行列であり，かつ

$$\Psi(t)=S(t)\Phi(t). \tag{5}$$

解 $\Phi(t)$，$\Psi(t)$ はいずれも，それらがみたすべき方程式を一意的に決定する（§17 の **E**］を見よ）．ゆえに（5）によって，方程式（4）は行列 $S(t)$ を係数とする変換によって方程式（1）からえられることがわかる．

A］，**B**］からわかるように，同等なもの（**B**］を見よ）を同一視すれば，（1）の形の各方程式には，互いに相似*) なものを同一視してきまる行列 C が対応する（（3）を見よ）．のみならず，（3）の形の変換に関する行列 C の不変量は，同等なものを同一視してきまる方程式（1）の不変量の完全系をつくっている．

A］，**B**］で述べたことがらはすべて，実行列に対してだけでなく，複素行列に対しても成り立つことに注意してほしい．つぎの重要なリャプーノフの定理（定理 12）では，実行列の場合と複素行列の場合とをわけて考える．

定理 12. 『いかなる方程式（1）も定数行列 B を係数とする方程式

$$\dot{Y}=BY$$

と同等（**B**］を見よ）である．行列 B は一般に複素行列である．もし方程式

*) 訳注：行列 Q, Q' に対して，$Q'=P^{-1}QP$（ただし P は非退化行列）のとき，Q と Q' は互いに相似であるという．また，Q' を P による Q の相似変形という．

（1）の係数 $A(t)$ が周期 τ の実行列ならば，方程式（1）を周期 2τ の周期的な方程式と考えるとき，（1）は実定数行列 B_1 を係数とする方程式

$$\dot{Y}=B_1Y$$

と同等になる．しかも方程式（1）から方程式 $\dot{Y}=B_1Y$ への変換の行列 $S(t)$ も実である』

定理 12 の証明にさきだって，つぎの命題を証明しよう．

C］ 定係数の線形同次方程式系を行列の記法によって

$$\dot{Y}=BY \qquad (B \text{ は定数行列}) \tag{6}$$

と書こう．このとき，行列

$$Y=e^{tB} \tag{7}$$

は方程式（6）の解である（§35 の **D］** を見よ）．

実際，関数 e^{tB} を具体的に書きあらわすと

$$e^{tB}=E+tB+\frac{t^2}{2!}B^2+\frac{t^3}{3!}B^3+\cdots\cdots$$

となるから，$\dfrac{d}{dt}e^{tB}$ に対して次式がえられる：

$$\frac{d}{dt}e^{tB}=B\left(E+tB+\frac{t^2}{2!}B^2+\cdots\cdots\right)=Be^{tB}.$$

定理 12 の証明 方程式（1）の任意の解 $X=\Phi(t)$ の基礎行列を C とする．§35 の **D］** によって，条件

$$e^{\tau B}=C$$

をみたす行列 B が存在する．方程式（1）と方程式

$$\dot{Y}=BY \tag{8}$$

とが同等なことを証明しよう．実際，**C］** によって行列 $Y=e^{tB}$ は方程式（8）の解であり，しかも

$$e^{(t+\tau)B}=e^{tB}\cdot e^{\tau B}=e^{tB}\cdot C$$

となるから，方程式（8）を周期 τ の周期係数の方程式とみなせば，C は解 $Y=e^{tB}$ の基礎行列となる．けっきょく，方程式（1），（8）の解の基礎行列が一致するから，これらの方程式は同等（**B］** を見よ）である．これで定理 12

の前半が証明された.

こんどは, $A(t)$ を実行列, $\Phi(t)$ を方程式（1）の実解, C を $\Phi(t)$ の基礎行列すなわち

$$\Phi(t+\tau)=\Phi(t)C \tag{9}$$

としよう. $\Phi(t)$ は実行列であるから, C もまた実行列である.（9）より

$$\Phi(t+2\tau)=\Phi(t+\tau)C=\Phi(t)C^2 \tag{10}$$

となる. §35 の **D**〕によれば, 条件

$$e^{2\tau B_1}=C^2$$

をみたす実行列 B_1 が存在する. 方程式（1）と方程式

$$\dot{Y}=B_1Y \tag{11}$$

とを周期 2τ の方程式と考えれば, この2つの方程式は互いに同等になることを証明しよう. 実際, 行列 e^{tB_1} は方程式 (11) の解であるから, 方程式 (11) を周期 2τ の周期係数の方程式と考えれば, 解 $Y=e^{tB_1}$ の基礎行列は C^2 である. 方程式（1）, (11) の解の基礎行列が一致するから, これらの方程式は同等である. ゆえに定理 12 が証明された.

D〕 固有値の絶対値がすべてある正の数 ρ よりも小であるような任意の n 次の正方行列をCとする. 行列 C^m（m は自然数）の要素を ${}^mc^i_j$ であらわすことにしよう, すなわち $C^m=({}^mc^i_j)$. このとき, i, j, m に関係しない正の数 r が存在して,

$$|{}^mc^i_j|<r\rho^m \tag{12}$$

となる. また, 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して, 不等式

$$|C^m\boldsymbol{x}|\leqq n^2r\rho^m|\boldsymbol{x}| \tag{13}$$

が成り立つ.

評価式 (12) を証明するため, 級数

$$f(z)=1+\frac{z}{\rho}+\frac{z^2}{\rho^2}+\cdots\cdots+\frac{z^m}{\rho^m}+\cdots\cdots$$

を考える. その収束半径は明らかに ρ に等しい. 定理 29（§35 を見よ）から, 行列の級数

$$f(C)=E+\frac{C}{\rho}+\frac{C^2}{\rho^2}+\cdots\cdots+\frac{C^m}{\rho^m}+\cdots\cdots$$

は収束する．すなわち級数

$$\delta^i_j+\frac{{}^1c^i_j}{\rho}+\frac{{}^2c^i_j}{\rho^2}+\cdots\cdots+\frac{{}^mc^i_j}{\rho^m}+\cdots\cdots$$

が収束する．ゆえに，どの項もある数 r を越えない．しかも r は数の対 (i,j) のすべてに対して共通にとることができる．これから評価式 (12) がえられる．

E］ 行列方程式（1）をベクトルの方程式にしたものを

$$\dot{x}=A(t)x \tag{14}$$

とし，（1）の解 $\Phi(t)$ の基礎行列を C とする．行列 C の重複度 k の固有値 λ を方程式（1）または (14) の重複度 k の**特性数**という．互いに相似なものを同一視すれば，行列 C は方程式（1）の解 $\Phi(t)$ の取りかたに関係しないから（**A**］を見よ），方程式 (14) の特性数とそれらの重複度は一意的にきまる．λ が方程式 (14) の重複度 k の特性数であるとき，$\frac{1}{\tau}\log\lambda$ を方程式 (14) の重複度 k の**特性指数**という．方程式 (14) の特性指数の実部がすべてある数 ν よりも小であれば，正の数 R が存在して，方程式 (14) の任意の解 $\varphi(t)$ に対してつぎの評価式が成り立つ：

$$|\varphi(t)|\leqq R|\varphi(0)|e^{\nu t}\qquad(t\geqq 0). \tag{15}$$

不等式 (15) を証明しよう．初期条件 $\Phi(0)=E$ をみたす方程式（1）の解を $\Phi(t)$ とすれば，方程式 (14) の任意の解 $\varphi(t)$ は

$$\varphi(t)=\Phi(t)\varphi(0) \tag{16}$$

の形に書ける．このことは，ベクトル関数 (16) を方程式 (14) に代入してたしかめられる．さらにまた，

$$\Phi(t+\tau)=\Phi(t)C,\ \Phi(t+2\tau)=\Phi(t)C^2,\ \cdots\cdots,\Phi(t+m\tau)=\Phi(t)C^m,\ \cdots\cdots \tag{17}$$

となる．区間 $0\leqq t_1\leqq\tau$ において行列 $\Phi(t_1)$ の要素は有界であるから，

$$|\Phi(t_1)x|\leqq\sigma|x|\qquad(0\leqq t_1\leqq\tau) \tag{18}$$

となるような正の数 σ が存在する．また，行列 C の固有値の絶対値はすべて $e^{\tau\nu}$ より小であるから，(13) によって，任意のベクトル x に対して，評価式

$$|C^m x|\leqq n^2 r e^{\tau m\nu}|x| \tag{19}$$

が成り立つ．つぎに t を任意の正の数とすれば，このとき

$$t=m\tau+t_1 \qquad (0\leqq t_1<\tau)$$

となる負でない整数 m が存在する．(16)，(17) から

$$\varphi(t)=\Phi(m\tau+t_1)\varphi(0)=\Phi(t_1)C^m\varphi(0).$$

これと (18)，(19) によって，次式がえられる：

$$|\varphi(t)|\leqq\sigma n^2 r e^{\tau m\nu}|\varphi(0)|.$$

$0\leqq t_1<\tau$ のとき $e^{t_1\nu}$ はある定数 $c>0$ より小ではないから，上式はつぎの形に書くことができる：

$$|\varphi(t)|\leqq\frac{\sigma n^2 r}{c}e^{\nu t}|\varphi(0)|.$$

これで評価式 (15) が証明された．

第 4 章

存 在 定 理

本章でははじめに，すでに述べた存在と一意性の定理 1, 2, 3 を証明する．さらに初期値と解との関係，また方程式がパラメータを含む場合には，パラメータと解との関係について考察する．まず初期値が一定な場合に解とパラメータとの関係をしらべ，つぎにごく簡単な方法で初期値をパラメータと見なして，初期値と解との関係をパラメータと解との関係に帰着させる．初期値の場合と同様，パラメータを含む場合にも解はパラメータに関して連続であること，また解はパラメータに関して微分可能であることが証明される．

すべての場合について，いわゆる大域的定理が述べられ，多くの教科書でしばしば述べられている《局所的》定理にはまったく触れなかった．その理由は，理論的にもまた応用に際しても，重要なのはいわゆる大域的定理であって，局所的定理ではないからである．局所的定理は大域的定理の証明に用いられるに過ぎない．ここで使った《大域的》という言葉は，解が短かい時間区間において考察されるのではなく，《全体的に》，《広い範囲にわたって》考察されることを意味する．つまり延長不能な解（§3 の A］を見よ）が研究されるのである．このことと関連してとくに §22 を延長不能な解の研究にあてた．

これらのことがらのほかにこの章では，常微分方程式系の第1積分およびこの概念に関連して線形偏微分方程式を考察するが，その結果をあとで使うことはない．

§20. 単独の方程式に対する存在と一意性の定理の証明

この§では，単独の方程式

$$\dot{x}=f(t,x) \tag{1}$$

に対して §1 で述べた存在と一意性の定理 1 を証明する．ただし（1）の右辺は (t, x)–平面 P のある開集合 Γ で定義され，かつその偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ とともに連続であると仮定する．つぎの § で与える定理 2 の証明は定理 1 の証明よりも複雑になるが，定理 1 をその特別の場合として含む．はじめに，単独の方程式に対する証明を与え，これによって証明の基本的な**考えかた**を明らかにする．一般の場合の証明は付加的なことがらによって長くなるだけである．定理 1 と定理 2 の証明は解析学の多くの存在定理の証明に応用されるピカール（Picard）の**逐次近似法**によっておこなう．この方法は同時にまた解の近似計算法でもあるので大きな実用価値がある．逐次近似法はある場合には**縮小写像法**とも解釈される．したがってここでは，これらの 2 つの方法の密接な関係をしめすような証明を与える．これら 2 つの方法のちがいは定理 3 の証明のときに明らかになる．

証明の基本的な考えかた

逐次近似法による定理 1 の証明の第一歩は，微分方程式を**積分方程式**に変換することである．これを独立した命題の形でつぎに述べよう．

A］ $x=\varphi(t)$ を区間 $r_1<t<r_2$ において定義された方程式（1）の 1 つの解とする．したがって

$$\dot{\varphi}(t)=f(t, \varphi(t)) \tag{2}$$

は恒等式である．また，この解のみたす初期条件を

$$\varphi(t_0)=x_0 \tag{3}$$

とする．このとき関数 $\varphi(t)$ は区間 $r_1<t<r_2$ において，積分恒等式

$$\varphi(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))d\tau \tag{4}$$

をみたす．逆に，ある連続関数 $\varphi(t)$ が区間 $r_1<t<r_2$ において恒等的に（4）をみたすならば，関数 $x=\varphi(t)$ は微分可能であって方程式（1）の解になり，かつ初期条件（3）をみたす．簡単にいえば，積分方程式（4）は初期条件（3）のもとで微分方程式（2）と<u>同値</u>である．

これを証明しよう．はじめに，関係式（4）がみたされているとする．その

変数 t に値 t_0 を与えれば $\varphi(t_0)=x_0$ がえられる．したがって，(4) から (3) が出てくる．さらに，恒等式 (4) の右辺は明らかに t に関して微分可能であるから，その左辺もまた t に関して微分可能である．恒等式 (4) を微分すれば，恒等式 (2) がえられる．

こんどは関係式 (2)，(3) がみたされているとしよう．(2) を t_0 から t まで積分すれば，次式がえられる：

$$\varphi(t)-\varphi(t_0)=\int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))d\tau.$$

(3) によって，上の等式から (4) がえられる．これで A] が証明された．

ここで，定理1の証明に使われるいくつかの記号を導入する．

B] $x=\varphi(t)$ をある区間 $r_1<t<r_2$ で定義されそのグラフが開集合 Γ にすっかり含まれるような連続関数，t_0 を区間 $r_1<t<r_2$ の1つの点とする．このとき (4) の右辺をもちいて，同じ区間 $r_1<t<r_2$ において定義された関数 $\varphi^*(t)$：

$$\varphi^*(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))d\tau \tag{5}$$

を関数 $\varphi(t)$ に対応させることができる（関数 $\varphi^*(t)$ のグラフはもちろんもはや開集合 Γ の中にあるとはかぎらない）．こうして，(4) の右辺は関数 φ に関数 φ^* を対応させる作用素であると考えることができる．この作用素を1つの文字 A であらわし，関係式 (5) をつぎのように書きあらわす：

$$\varphi^*=A\varphi. \tag{6}$$

作用素 A を使えば，積分方程式 (4) は

$$\varphi=A\varphi \tag{7}$$

と書くことができる．

C] 区間 $r_1\leqq t\leqq r_2$ で定義された連続関数 $\varphi(t)$ に対して，その**ノルム** $\|\varphi\|$ とはその絶対値の最大値

$$\|\varphi\|=\max_{r_1\leqq t\leqq r_2}|\varphi(t)|$$

のことである．$\psi(t)$ と $\chi(t)$ が区間 $r_1\leqq t\leqq r_2$ 上の2つの連続関数であれ

ば，それらの差 $\psi(t)-\chi(t)$ のノルム $\|\psi-\chi\|$ は負でない数であって，これらの関数が互いにどれくらいへだたっているかという１つの目安を与えるものである．$\|\varphi-\chi\|$ が小であれば，関数 ψ と χ とはお互いに《近い》のである．等式 $\|\psi-\chi\|=0$ が成り立つのは，関数 ψ と χ とが恒等的に一致する場合であり，かつこの場合にかぎる．ノルムの概念をもちいれば，よく知られた連続関数列の一様収束性の条件を容易に述べかえることができる．区間 $r_1\leqq t\leqq r_2$ で定義された連続関数列

$$\varphi_0(t), \varphi_1(t), \cdots\cdots, \varphi_i(t), \cdots\cdots \tag{8}$$

が同じ区間 $r_1\leqq t\leqq r_2$ で定義された関数 φ に一様収束するための条件は，

$$\lim_{i\to\infty}\|\varphi-\varphi_i\|=0$$

が成り立つことである．したがって，$\sum_i a_i<+\infty$ なる $a_1,\ a_2, \cdots\cdots, a_i, \cdots\cdots$ に対して不等式

$$\|\varphi_{i+1}-\varphi_i\|\leqq a_i$$

が成り立てば，関数列（８）は一様収束する．

定理１のくわしい証明にはいる前に，方程式（７）を解くのに使われる逐次近似法を簡単に述べよう．まず，点 t_0 を内点とするある区間 $r_1\leqq t\leqq r_2$ で定義された連続関数列

$$\varphi_0, \varphi_1, \cdots\cdots, \varphi_i, \cdots\cdots \tag{9}$$

を，等式

$$\varphi_{i+1}=A\varphi_i, \qquad i=0, 1, 2, \cdots\cdots \tag{10}$$

によって構成する．関数 φ_i のグラフが集合 Γ の中にあれば，関数 φ_{i+1} は等式 (10) によって定義されるが，そのつぎの関数 φ_{i+2} が定義されるためには，関数 φ_{i+1} のグラフもまた集合 Γ の中になければならない．これはあとでしめすように，区間 $r_1\leqq t\leqq r_2$ を十分に短かくとればうまくいく．また，区間 $r_1\leqq t\leqq r_2$ を短かくすることによって，関数列（９）が

$$\|\varphi_{i+1}-\varphi_i\|\leqq k\|\varphi_i-\varphi_{i-1}\|, \qquad i=1, 2, \cdots\cdots \tag{11}$$

をみたすようにすることができる．ただし k は $0<k<1$ なる定数である．不等式 (11) から，不等式

$$\|\varphi_{i+1}-\varphi_i\| \leqq \|\varphi_1-\varphi_0\|\cdot k^i, \qquad i=1,2,\cdots\cdots$$

がえられ，したがって系列（9）は一様収束する．このあと，関数列（9）の極限関数 φ が方程式（7）をみたすことをしめすのは容易である．

このしくみはやや別の形で，すなわち縮小写像の方法として記述することもできる．区間 $r_1<t<r_2$（ここに $r_1<t_0<r_2$）で定義されかつそのグラフが集合 Γ の中にあるような関数からなる族 Ω をとろう．ただし，関数族 Ω は作用素 A に関してつぎの2条件をみたしているものとする：1) 族 Ω の任意の関数に作用素 A をほどこせば，ふたたび Ω の関数がえられる；2) 定数 k $(0<k<1)$ が存在して，族 Ω の任意の2つの関数 ψ, χ に対して，不等式

$$\|A\psi-A\chi\| \leqq k\|\psi-\chi\|$$

が成り立つ．この意味で写像 A は縮小写像なのである（正しくは《縮小させる》というべきであろう）．

容易にわかるように，もしも族 Ω に対して上の条件がみたされていれば，その任意の関数 φ_0 から出発して，帰納的な定義式（10）によって条件（11）をみたす無限列（9）がえられ，これは上に述べたように方程式（7）の解 φ に収束する．

さて，いままで述べてきた考えかたにもとづいて定理1を証明することにしよう．

定理1の証明

これから求める方程式（1）の解の初期値 t_0, x_0 は，集合 Γ の1つの点 (t_0, x_0) を定める．まず，点 (t_0, x_0) を中心にその各辺が座標軸に平行であって境界も含めて集合 Γ の中にすっかり含まれるような任意の長方形

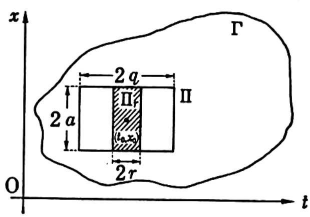


図　39

Π をとろう（図 39）．長方形 Π の t 軸に平行な辺の長さを $2q, x$ 軸に平行な辺の長さを $2a$ とする．したがって点 (t, x) が長方形 Π に属するのは，不等式

$$|t-t_0| \leqq q, \qquad |x-x_0| \leqq a \tag{12}$$

がみたされるときであり，かつこのときにかぎる．長方形 Π は Γ 内の閉集合であるから，その上での連続関数 $f(t,x)$ および $\dfrac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ は有界である．ゆえに正の数 M, K が存在して，条件 (12) をみたす t, x に対して，不等式

$$|f(t,x)| \leqq M, \qquad \left|\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right| \leqq K \tag{13}$$

が成り立つ．

長方形 Π とともに，

$$r \leqq q \tag{14}$$

として，不等式

$$|t-t_0| \leqq r, \qquad |x-x_0| \leqq a$$

によって定義されるさらに《せまい》長方形 Π_r を考えよう（図 39)．つぎに r をもっと正確にきめることにする．区間 $|t-t_0| \leqq r$ において定義されそのグラフが長方形 Π_r の中にあるような連続関数全体の集合を Ω_r であらわす．そうすると，区間 $|t-t_0| \leqq r$ で定義された連続関数 φ が族 Ω_r に属するのは，この区間内の任意の t に対して

$$|\varphi(t)-x_0| \leqq a \tag{15}$$

となる場合であり，かつこの場合にかぎる．

ここで r を，つぎの 2 条件がみたされるようにえらぶことにする．

a）関数 φ が族 Ω_r に属していれば，関数 $\varphi^*=A\varphi$ ((5),(6) を見よ）もまた族 Ω_r に属する．

b）定数 k $(0<k<1)$ が存在して，族 Ω_r の任意の 2 つの関数 ψ, χ に対して，不等式

$$\|A\psi - A\chi\| \leqq k\|\psi-\chi\| \tag{16}$$

が成り立つ．

まず条件 a) をしらべてみよう．関数 $\varphi^*=A\varphi$ が族 Ω_r に属するためには，$|t-t_0| \leqq r$ のとき不等式

$$|\varphi^*(t)-x_0| \leqq a$$

が成り立つことが必要かつ十分である．(5) と (13) とから次式がえられる：

$$|\varphi^*(t)-x_0|=\left|\int_{t_0}^t f(\tau,\varphi(\tau))d\tau\right|\leqq Mr.$$

このことからわかるように,

$$r\leqq\frac{a}{M} \tag{17}$$

ならば, 条件 a) がみたされる.

こんどは条件 b) をしらべてみよう.

$$\psi^*(t)=x_0+\int_{t_0}^t f(\tau,\psi(\tau))d\tau,$$

$$\chi^*(t)=x_0+\int_{t_0}^t f(\tau,\chi(\tau))d\tau$$

であるから, 第1式から第2式をひけば

$$\begin{aligned}|\psi^*(t)-\chi^*(t)|&=\left|\int_{t_0}^t (f(\tau,\psi(\tau))-f(\tau,\chi(\tau)))d\tau\right|\\&\leqq\left|\int_{t_0}^t |f(\tau,\psi(\tau))-f(\tau,\chi(\tau))|d\tau\right| \end{aligned}\tag{18}$$

となる. ここで平均値の定理と (13) の2番目の不等式とを使って, 上の最後の積分の中の式を評価してみると:

$$|f(\tau,\psi(\tau))-f(\tau,\chi(\tau))|=\left|\frac{\partial f(\tau,\theta)}{\partial x}(\psi(\tau)-\chi(\tau))\right|\leqq K\cdot|\psi(\tau)-\chi(\tau)|, \tag{19}$$

ただし θ は $\psi(\tau)$ と $\chi(\tau)$ との間の値である. したがって $|\theta-x_0|\leqq a$ である. (18) と (19) とから,

$$\|A\psi-A\chi\|=\|\psi^*-\chi^*\|\leqq Kr\|\psi-\chi\|$$

がえられる. ゆえに, もしも $k=Kr$ が1より小であれば, すなわち

$$r<\frac{1}{K} \tag{20}$$

ならば, 条件 b) がみたされる. けっきょく, r が不等式 (14), (17), (20) をみたせば, 族 Ω_r は条件 a), b) をみたす. 以後, r は不等式 (14), (17), (20) をみたすようにえらばれているものと考える.

さて, ここで

$$\varphi_0(t) \equiv x_0 \tag{21}$$

$$\varphi_{i+1} = A\varphi_i, \qquad i=0, 1, 2, \cdots\cdots \tag{22}$$

とおいて，区間 $|t-t_0| \leqq r$ で定義された関数列

$$\varphi_0, \varphi_1, \cdots\cdots, \varphi_i, \cdots\cdots \tag{23}$$

をつくる．関数 (21) は族 Ω_r に属しているから，列 (23) のどの関数も同じ族 Ω_r に属する（条件 a)）．さらに（(15) を見よ）

$$\|\varphi_1 - \varphi_0\| = \max_{|t-t_0| \leqq r} |\varphi_1(t) - x_0| \leqq a.$$

(16) によって

$$\|\varphi_{i+1} - \varphi_i\| = \|A\varphi_i - A\varphi_{i-1}\| \leqq k\|\varphi_i - \varphi_{i-1}\|$$

がえられ，これより

$$\|\varphi_{i+1} - \varphi_i\| \leqq ak^i, \qquad i=0, 1, 2, \cdots\cdots$$

ゆえに C] によって，関数列 (23) は区間 $|t-t_0| \leqq r$ において定義されたある連続関数 φ に一様収束する．(23) の各関数は族 Ω_r に属しているから，関数 φ もまた Ω_r に属する（(15) を見よ)．関数 φ が方程式（7）の解であることをしめそう．実際，

$$\|A\varphi - A\varphi_i\| \leqq k\|\varphi - \varphi_i\|$$

であるから，関数列 $A\varphi_0, A\varphi_1, \cdots\cdots, A\varphi_i, \cdots\cdots$ は関数 $A\varphi$ に一様収束する．したがって，関係式 (22) において $i \to \infty$ と極限移行すれば

$$\varphi = A\varphi$$

となる．けっきょく，つぎのことが証明された：

『初期条件（3）をみたす方程式（1）の解 $x=\varphi(t)$ が存在する．しかも解 $x=\varphi(t)$ は少なくとも区間 $|t-t_0|<r$（r は不等式 (14)，(17)，(20) をみたす任意の正の数）**において存在する』**

こんどは一意性を証明しよう．$x=\psi(t)$, $x=\chi(t)$ を方程式（1）の解で同じ初期値 t_0, x_0 をもつものとし，かつこの2つの解の定義区間の共通部分を区間 $r_1<t<r_2$ とする．明らかに $r_1<t_0<r_2$．もしも2つの解 $\psi(t)$ と $\chi(t)$ とが区間 $r_1<t<r_2$ のある一点 t_1 において同じ値をとれば，この2つの解は，十分小さい正の数 r に対して，区間 $|t-t_1|<r$ においてまったく一致す

ることをしめそう．$x_1=\psi(t_1)=\chi(t_1)$ とおけば，t_1, x_1 はこれら2つの解に対する同一の初期値と考えられる．この意味において点 (t_1, x_1) は点 (t_0, x_0) となんら異なるところがないから，点 (t_1, x_1) のかわりに記号 (t_0, x_0) を流用することにすれば，前の記号がそのまま使える．微分方程式（1）から積分方程式（4）にうつることによって，2つの関数 ψ, χ に対し，積分方程式

$$\psi=A\psi, \qquad \chi=A\chi \tag{24}$$

がえられる．前と同様に，開集合 Γ 内に点 (t_0, x_0) を中心とする長方形 Π をとり，さらにその中に長方形 Π_r をとる．ただし r は不等式 (14), (17), (20) のほかに，つぎのもう1つの条件をみたすような正の数とする：区間 $|t-t_0|\leqq r$ では関数 ψ, χ がともに定義され，かつ不等式

$$|\psi(t)-x_0|\leqq a, \qquad |\chi(t)-x_0|\leqq a$$

をみたす．このように r をとることができるのは，関数 $\psi(t)$, $\chi(t)$ が連続だからである．ゆえに，関数 $\psi(t)$, $\chi(t)$ の定義域を区間 $|t-t_0|\leqq r$ と考えれば，$\psi(t), \chi(t)$ は族 Ω_r に属し，したがって (24) と不等式 (16) とによって

$$\|\psi-\chi\|=\|A\psi-A\chi\|\leqq k\|\psi-\chi\|$$

となる．ところが，このようなことがおこりうるのは $\|\psi-\chi\|=0$ のとき，すなわち区間 $|t-t_0|\leqq r$ において関数 ψ と χ とが一致する場合だけである．

さて，$\psi(t)$ と $\chi(t)$ とが区間 $r_1<t<r_2$ 全体で一致することを証明しよう．結論を否定して，区間 $r_1<t<r_2$ のある点 t^* において $\psi(t^*)\neq\chi(t^*)$ であったとする．明らかに $t^*\neq t_0$ である．議論を明確にするため，$t^*>t_0$ と仮定しよう．$\psi(t)=\chi(t)$ となるような（区間 $t_0\leqq t\leqq t^*$ の）点 t 全体の集合を N であらわす．このとき N は閉集合となることを証明しよう．実際，τ_1, τ_2, …… をある点 τ に収束するような集合 N の点列とすれば，$\psi(\tau_i)=\chi(\tau_i)$ であるから関数 ψ, χ の連続性によって

$$\psi(\tau)=\lim_{i\to\infty}\psi(\tau_i)=\lim_{i\to\infty}\chi(\tau_i)=\chi(\tau)$$

となり，点 τ は集合 N に属することがわかる．いま集合 N の上限を t_1 とすれば，N は閉集合であるから，t_1 も N に属する．ゆえに $\psi(t_1)=\chi(t_1)$ であ

り，$t_1<t^*$ となる．ところがそうすると，すでに証明したことによって $\psi(t)$ と $\chi(t)$ とはある区間 $|t-t_1|<r$ において一致しなければならず，それゆえ t_1 は集合 N の上限ではありえない．これは矛盾である．これで定理1が証明された．

例

ごく簡単な方程式

$$\dot{x}=x$$

の解を逐次近似法によって求めてみよう．初期値が

$$t_0=0, \qquad x_0=1$$

であるような解を求めることにする．対応する積分方程式は，つぎの形に書かれる：

$$\varphi(t)=1+\int_{t_0}^{t}\varphi(\tau)\,d\tau.$$

ここで，関数列

$$\varphi_0, \varphi_1, \cdots\cdots, \varphi_l, \cdots\cdots$$

をつくると，つぎのようになる：

$$\varphi_0(t)\equiv 1,$$

$$\varphi_1(t)=1+\int_0^t d\tau=1+t,$$

$$\varphi_2(t)=1+\int_0^t(1+\tau)\,d\tau=1+t+\frac{1}{2!}t^2.$$

$$\varphi_3(t)=1+\int_0^t\left(1+\tau+\frac{1}{2!}\tau^2\right)d\tau=1+t+\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{3!}t^3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_n(t)=1+t+\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{3!}t^3+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}t^n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

この関数列は数直線上の任意の区間において一様収束し，その極限は $\varphi(t)=e^t$ である．

§21. 正規形の方程式系に対する存在と一意性の定理の証明

ここでは，§3 で述べた正規形の方程式系

$$\dot{x}^i=f^i(t, x^1, x^2, \cdots\cdots, x^n), \qquad i=1, \cdots\cdots, n, \tag{1}$$

に対する存在と一意性の定理2を証明する．ここで（1）の右辺 $f^i(t, x^1, x^2, \cdots\cdots, x^n)$ はその偏導関数 $\dfrac{\partial f^i(t, x^1, \cdots\cdots x^n)}{\partial x^j}$ $(i, j=1, \cdots\cdots, n)$ とともに $(t,$

$x^1, \cdots\cdots, x^n$)-空間のある開集合 Γ で定義され，かつ連続であると仮定する．

$$\boldsymbol{x}=(x^1, \cdots\cdots, x^n), \tag{2}$$

$$\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})=(f^1(t, \boldsymbol{x}),\ f^2(t, \boldsymbol{x}), \cdots\cdots, f^n(t, \boldsymbol{x}))$$

とおいて，ベクトルの記法によって系（1）を書きかえれば（§14 の A］を見よ），つぎのようになる：

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}). \tag{3}$$

定理の証明はベクトルの記法のまま逐次近似法によっておこなうが，それはほとんど前の§で与えた定理1の証明の逐語的なくりかえしである．定理2の証明のほかに，定理3の証明もやはり逐次近似法によって与えるが，これは定理2の証明にくらべてやや変形される．

補助的な命題

ベクトルの記法が自由に使えるように，はじめにいくつかの自然な定義と，ベクトルおよびベクトル関数に対する簡単な不等式を与えよう．

ベクトル（2）の**長さ**または**絶対値** $|\boldsymbol{x}|$ は，周知のように

$$|\boldsymbol{x}|=+\sqrt{(x^1)^2+\cdots\cdots+(x^n)^2}$$

よって定義される．2つのベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して，不等式

$$|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}| \leqq |\boldsymbol{x}|+|\boldsymbol{y}|$$

が成り立つ．これは容易に証明できる．この不等式から，任意有限個のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \cdots\cdots, \boldsymbol{x}_l$ に対しても同様な不等式がみちびかれる．すなわち

$$|\boldsymbol{x}_1+\cdots\cdots+\boldsymbol{x}_l| \leqq |\boldsymbol{x}_1|+\cdots\cdots+|\boldsymbol{x}_l|. \tag{4}$$

$\boldsymbol{\varphi}(t)=(\varphi^1(t), \cdots\cdots, \varphi^n(t))$ を実変数 t の連続なベクトル関数，すなわち各成分が変数 t の連続関数であるようなベクトルとする．区間 $r_1<t<r_2$ で定義されたベクトル関数 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ に対して，

$$\psi^i(t)=\int_{t_0}^{t}\varphi^i(\tau)d\tau \qquad (r_1<t_0<r_2)$$

を成分とするベクトル関数 $\boldsymbol{\psi}(t)=(\psi^1(t), \cdots\cdots, \psi^n(t))$ がまた同じ区間 $r_1<t<r_2$ において定義される．これを

$$\Phi(t)=\int_{t_0}^{t}\varphi(\tau)d\tau$$

であらわす．このとき，つぎの不等式が成り立つ：

$$\left|\int_{t_0}^{t}\varphi(\tau)d\tau\right|\leqq\left|\int_{t_0}^{t}|\varphi(\tau)|d\tau\right|. \tag{5}$$

この不等式を証明するため，

$$\varDelta=\frac{t-t_0}{m},\quad t_k=t_0+k\varDelta,\qquad k=1,\cdots\cdots,m,$$

とおいて，積分区間を m 等分する（$\varDelta$ は $t>t_0$ ならば正，$t<t_0$ ならば負である）．そうすれば，ベクトル関数の積分の定義と（4）とから，

$$\left|\int_{t_0}^{t}\varphi(\tau)d\tau\right|=\left|\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\varphi(t_k)\varDelta\right|\leqq\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}|\varphi(t_k)|\cdot|\varDelta|=\left|\int_{t_0}^{t}|\varphi(\tau)|d\tau\right|$$

がえられる．

$(x^1,\cdots\cdots,x^n)$-空間の凸集合 Δ を動く変ベクトル $\boldsymbol{x}$ のベクトル関数

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=(g^1(x^1,\cdots\cdots,x^n),\cdots\cdots,g^n(x^1,\cdots\cdots,x^n))$$

に対して，不等式

$$\left|\frac{\partial g^i(x^1,\cdots\cdots,x^n)}{\partial x^j}\right|\leqq K$$

が成り立っていると仮定しよう．ここに K は正の定数である．このとき，集合 Δ の任意の2点 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ に対してつぎの不等式が成り立つ：

$$|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})|\leqq n^2K|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|. \tag{6}$$

この不等式を証明するため，点 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ とをむすぶ線分，すなわち

$$\boldsymbol{z}(s)=\boldsymbol{y}+s(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$$

を考える．s が区間 $0\leqq s\leqq 1$ 全体を動くとき，点 $\boldsymbol{z}(s)$ は点 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ とをむすぶ線分全体を動き，しかも Δ は凸集合であるから，この点はつねに Δ の中にある．ゆえに（平均値の定理を適用して），

$$g^i(\boldsymbol{x})-g^i(\boldsymbol{y})=g^i(\boldsymbol{z}(1))-g^i(\boldsymbol{z}(0))=\left.\frac{dg^i(\boldsymbol{z}(s))}{ds}\right|_{s=\theta}.$$

合成関数の微分法の公式によって $\dfrac{dg^i(\boldsymbol{z}(s))}{ds}$ を計算すると，

$$\frac{dg^i(\boldsymbol{z}(s))}{ds}=\frac{dg^i(z^1(s),\cdots\cdots,z^n(s))}{ds}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g^i(z^1(s),\cdots\cdots,z^n(s))}{\partial x^k}\cdot\frac{dz^k(s)}{ds}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g^i(z^1(s),\cdots\cdots,z^n(s))}{\partial x^k}\cdot(x^k-y^k)$$

となる．したがって，

$$|g^i(\boldsymbol{x})-g^i(\boldsymbol{y})|\leqq\sum_{k=1}^{n}K|x^k-y^k|\leqq\sum_{k=1}^{n}K|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\leqq nK|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|.$$

この不等式を2乗し，これを i について加えて開平すれば次式がえられる：

$$|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})|\leqq n^{3/2}K|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\leqq n^2K|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|.$$

定理1の証明のときと同様，微分方程式（3）を積分方程式に変換しよう．

A］ 微分方程式（3）の任意の解を $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ とする．したがって

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t)=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{\varphi}(t)) \tag{7}$$

は恒等式である．この解のみたす初期条件を

$$\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{x}_0 \tag{8}$$

とする．このとき，関係（7），（8）は1つの恒等式

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(\tau,\boldsymbol{\varphi}(\tau))d\tau \tag{9}$$

に同値である．

これを証明しよう．積分恒等式（9）が成り立っているものとする．そこで $t=t_0$ とおけば等式（8）が，また（9）を t について微分すれば恒等式（7）がえられる．こんどは，逆に関係（7），（8）が成り立っているとしよう．関係式（7）を t_0 から t まで積分し，かつ（8）に注意すれば，関係式（9）がえられる．

B］（9）の右辺を使って，グラフが集合 Γ 内にあるような任意のベクトル関数 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ に関数 $\boldsymbol{\varphi}^*(t)$：

$$\boldsymbol{\varphi}^*(t)=\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(\tau,\boldsymbol{\varphi}(\tau))d\tau \tag{10}$$

を対応させるとき，この対応関係を，つぎのように作用素 A を使って簡単に書きあらわす：

$$\varphi^* = A\varphi. \tag{11}$$

そうすれば，方程式（9）は

$$\varphi = A\varphi \tag{12}$$

の形に書かれる．

C〕 区間 $r_1 \leqq t \leqq r_2$ で定義された連続なベクトル関数 $\varphi(t)$ に対して，そのノルム $\|\varphi\|$ をつぎのように定義する：

$$\|\varphi\| = \max_{r_1 \leqq t \leqq r_2} |\varphi(t)|.$$

ノルムの概念をもちいて，区間 $r_1 \leqq t \leqq r_2$ で定義された連続なベクトル関数列

$$\varphi_0,\ \varphi_1, \cdots\cdots, \varphi_i, \cdots\cdots \tag{13}$$

が一様収束するための条件を述べることができる．ベクトル関数列 (13) が同じ区間 $r_1 \leqq t \leqq r_2$ で定義された連続なベクトル関数 φ に一様収束するための条件は，

$$\lim_{i\to\infty} \|\varphi - \varphi_i\| = 0$$

である．したがって，関数列 (13) が一様収束するためには，$\sum_i a_i < +\infty$ なる $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_i, \cdots\cdots$ に対して不等式

$$\|\varphi_{i+1} - \varphi_i\| \leqq a_i$$

が成り立てば十分である．

さて，定理 2 の証明にうつろう．

定理 2 の証明

点 $(t_0, \boldsymbol{x}_0) = (t_0, x_0^1, x_0^2, \cdots\cdots, x_0^n)$ は開集合 Γ に属しているのであるから，適当に正の数 q, a をとれば，条件

$$|t - t_0| \leqq q, \qquad |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| \leqq a \tag{14}$$

をみたす点 $(t, \boldsymbol{x})$ はすべて集合 Γ に属するようにできる．条件 (14) をみたす点 $(t, \boldsymbol{x})$ の全体からなる集合 Π は有界閉集合であるから，連続関数

$$|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})| \quad \text{および} \quad \left|\frac{\partial f^i(t, \boldsymbol{x})}{\partial x^j}\right|, \qquad i, j = 1, \cdots\cdots, n,$$

は Π において有界である．すなわち正の数 M, K が存在して，Π において

$$|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})|\leqq M,\qquad \left|\frac{\partial f^i(t,\boldsymbol{x})}{\partial x^j}\right|\leqq K,\qquad i,j=1,\cdots\cdots,n, \tag{15}$$

となる．集合 Π とともに，

$$r\leqq q \tag{16}$$

として，不等式

$$|t-t_0|\leqq r,\qquad |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|\leqq a$$

によって定義される Π の部分集合 Π_r を考えよう（図 40）．区間 $|t-t_0|\leqq r$ で定義されかつそのグラフが Π_r 内にあるような連続なベクトル関数全体のつくる族を Ω_r であらわす．区間 $|t-t_0|\leqq r$ で定義された連続関数 φ が族 Ω_r に属するのは，この区間の任意の t に対して，不等式

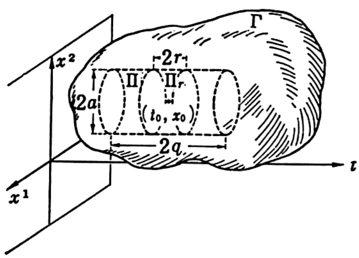


図 40

$$|\varphi(t)-\boldsymbol{x}_0|\leqq a \tag{17}$$

が成り立つ場合であり，かつこの場合にかぎる．

ここで，つぎの2つの条件がみたされるように正の数 r をえらぶ：

a）関数 φ が族 Ω_r に属していれば，関数 $\varphi^*=A\varphi$ （(10)，(11) を見よ）もまた Ω_r に属する．

b）定数 k $(0<k<1)$ が存在して，族 Ω_r の任意の2つの関数 φ,χ に対して，不等式

$$\|A\phi-A\chi\|\leqq k\|\phi-\chi\| \tag{18}$$

が成り立つ．

まず条件 a）について考える．関数 $\varphi^*=A\varphi$ が族 Ω_r に属するためには，$|t-t_0|\leqq r$ のとき，不等式

$$|\varphi^*(t)-\boldsymbol{x}_0|\leqq a$$

が成り立つことが必要かつ十分である．(10)，(5)，(15) によってつぎの式がえられる：

$$|\varphi^*(t)-\boldsymbol{x}_0|=\left|\int_{t_0}^t \boldsymbol{f}(\tau,\varphi(\tau))d\tau\right|\leqq\left|\int_{t_0}^t|\boldsymbol{f}(t,\varphi(\tau))|d\tau\right|\leqq Mr.$$

このことからわかるように，

$$r \leqq \frac{a}{M} \tag{19}$$

ならば，条件 a）がみたされる．

こんどは，条件 b）について考えてみる．

$$|\boldsymbol{\phi}^*(t)-\boldsymbol{\chi}^*(t)|=\left|\int_{t_0}^{t}(\boldsymbol{f}(\tau,\boldsymbol{\phi}(\tau))-\boldsymbol{f}(\tau,\boldsymbol{\chi}(\tau)))d\tau\right|$$

$$\leqq\left|\int_{t_0}^{t}|\boldsymbol{f}(\tau,\boldsymbol{\phi}(\tau))-\boldsymbol{f}(\tau,\boldsymbol{\chi}(\tau))|d\tau\right| \tag{20}$$

から，不等式（6），(15) を使って，最後の積分記号の中の式を評価すると，

$$|\boldsymbol{f}(\tau,\boldsymbol{\phi}(\tau))-\boldsymbol{f}(\tau,\boldsymbol{\chi}(\tau))|\leqq n^2K|\boldsymbol{\phi}(\tau)-\boldsymbol{\chi}(\tau)| \tag{21}$$

となり，(20) と (21) とから

$$\|A\boldsymbol{\phi}-A\boldsymbol{\chi}\|=\|\boldsymbol{\phi}^*-\boldsymbol{\chi}^*\|\leqq n^2Kr\|\boldsymbol{\phi}-\boldsymbol{\chi}\|$$

がえられる．ゆえに，$n^2Kr<1$ のとき，すなわち

$$r<\frac{1}{n^2K} \tag{22}$$

であれば，条件 b）がみたされる．

けっきょく，もしも r が不等式 (16)，(19)，(22) をみたしていれば（以後，このように考えることにする），族 Ω_r は条件 a)，b）をみたす．さて，

$$\boldsymbol{\varphi}_{i+1}=A\boldsymbol{\varphi}_i, \qquad i=0,1,\cdots\cdots \tag{23}$$

とおいて，区間 $|t-t_0|\leqq r$ で定義されたベクトル関数列

$$\boldsymbol{\varphi}_0(t)\equiv\boldsymbol{x}_0,\ \ \boldsymbol{\varphi}_1(t),\cdots\cdots,\boldsymbol{\varphi}_i(t),\cdots\cdots \tag{24}$$

をつくろう．関数 $\boldsymbol{\varphi}_0$ は族 Ω_r に属しているから，関数列 (24) の関数はすべてまたこの族 Ω_r に属する（条件 a）を見よ)．さらに（(17) を見よ)：

$$\|\boldsymbol{\varphi}_1-\boldsymbol{\varphi}_0\|=\max_{|t-t_0|\leqq r}|\boldsymbol{\varphi}_1(t)-\boldsymbol{x}_0|\leqq a.$$

(18) によって，

$$\|\boldsymbol{\varphi}_{i+1}-\boldsymbol{\varphi}_i\|=\|A\boldsymbol{\varphi}_i-A\boldsymbol{\varphi}_{i-1}\|\leqq k\|\boldsymbol{\varphi}_i-\boldsymbol{\varphi}_{i-1}\|$$

となり，これより

$$\|\boldsymbol{\varphi}_{i+1}-\boldsymbol{\varphi}_i\|\leqq ak^i. \tag{25}$$

したがって C〕により，関数列 (24) は族 Ω_r に属するある連続関数 φ に一様収束する．つぎに関数 φ は方程式 (12) をみたすことをしめそう．実際，

$$\|A\varphi - A\varphi_i\| \leqq k\|\varphi - \varphi_i\|$$

であるから，関数列 $A\varphi_0, A\varphi_1, \cdots\cdots, A\varphi_i, \cdots\cdots$ は関数 $A\varphi$ に一様収束する．したがって，関係式 (23) において $i \to \infty$ と極限移行すれば

$$\varphi = A\varphi$$

がえられる．けっきょく，つぎのことが証明された：

『初期条件（8）をみたす方程式（3）の解 $x=\varphi(t)$ が存在する．しかも解 $x=\varphi(t)$ は少なくとも区間 $|t-t_0|<r$（r は不等式 (16), (19), (22) をみたす任意の正の数）**において存在する』**

つぎに一意性の定理を証明しよう．$x=\phi(t)$, $x=\chi(t)$ を方程式（3）の解で同じ初期値 t_0, x_0 をもつものとし，これら 2 つの解の定義区間の共通部分を区間 $r_1<t<r_2$ とする．明らかに $r_1<t_0<r_2$. もしも 2 つの解 $\phi(t)$ と $\chi(t)$ とが区間 $r_1<t<r_2$ のある一点 t_1 において一致すれば，両者は十分小さい正の数 r に対して区間 $|t-t_1|<r$ においてまったく一致することをしめそう．$x_1=\phi(t_1)=\chi(t_1)$ とおけば，t_1, x_1 はこれら 2 つの解 $x=\phi(t)$ と $x=\chi(t)$ とに対する同一の初期値と考えられる．

この意味で点 (t_1, x_1) は点 (t_0, x_0) となんら異なるところがないから，点 (t_1, x_1) のかわりに記号 (t_0, x_0) を流用することにすれば，前の記号がそのまま使える．微分方程式（3）から積分方程式（9）にうつることによって，2 つの関数 ϕ, χ に対し，作用素 A によってあらわされる積分方程式：

$$\phi = A\phi, \quad \chi = A\chi \tag{26}$$

がえられる．ここで前と同様に，領域 Γ 内に点 (t_0, x_0) を中心とする集合 Π をとり（不等式 (14) を見よ），つぎに集合 Π_r をとる．ただし，正の数 r は不等式 (16), (19), (22) のほかに，つぎのもう 1 つの条件をみたすようにとられているものとする：区間 $|t-t_0|\leqq r$ では関数 ϕ, χ が定義され，かつ不等式

$$|\phi(t)-x_0|\leqq a, \qquad |\chi(t)-x_0|\leqq a$$

をみたす．このように正の数 r をとることができるのは，関数 $\phi(t)$, $\chi(t)$ が

連続だからである．ゆえに，関数 $\phi(t), \chi(t)$ の定義域を区間 $|t-t_0|\leqq r$ と考えれば $\phi(t), \chi(t)$ は族 Ω_r に属し，したがって，不等式 (18) と (26) とによって，

$$\|\phi-\chi\|=\|A\phi-A\chi\|\leqq k\|\phi-\chi\|$$

となる．ところが，このようなことがおこりうるのは $\|\phi-\chi\|=0$ のとき，すなわち区間 $|t-t_0|\leqq r$ において関数 ϕ と χ とが一致する場合だけである．

さて，$\phi(t)$ と $\chi(t)$ とが区間 $r_1<t<r_2$ 全体で一致することを証明しよう．結論を否定して，区間 $r_1<t<r_2$ のある点 t^* において $\phi(t^*)\neq\chi(t^*)$ であったとする．明らかに $t^*\neq t_0$ である．議論を明確にするため，$t^*>t_0$ と仮定する．$\phi(t)=\chi(t)$ となるような（区間 $t_0\leqq t\leqq t^*$ の）点 t 全体の集合を N であらわし，N が閉集合になることを証明しよう．実際，$\tau_1, \tau_2, \cdots\cdots$ をある点 τ に収束するような集合 N の点列とすれば，$\phi(\tau_i)=\chi(\tau_i)$ であるから，関数 ϕ, χ の連続性によって

$$\phi(\tau)=\lim_{i\to\infty}\phi(\tau_i)=\lim_{i\to\infty}\chi(\tau_i)=\chi(\tau)$$

となり，点 τ は集合 N に属することがわかる．いま集合 N の上限を t_1 とすれば，N は閉集合であるから，t_1 も N に属する．ゆえに $\phi(t_1)=\chi(t_1)$ であり，$t_1<t^*$ となる．ところがそうすると，すでに証明したことによって $\phi(t)$ と $\chi(t)$ とはある区間 $|t-t_1|<r$ において一致しなければならず，それゆえ t_1 は集合 N の上限ではありえない．これは矛盾である．

これで定理2が証明された．

ここで，定理2の証明の途中で述べたいくつかのことがらのうちで以下必要となるものを単独の形で書き出しておこう．

D］ 方程式系（1）（またはベクトルの記法による方程式（3））の右辺はその偏導関数 $\dfrac{\partial f^i}{\partial x^j}$ とともに開集合 Γ で定義されかつ連続であると仮定する．集合 Γ の任意の点を $(t_0, \boldsymbol{x}_0)$ とし，また不等式 (14) をみたす点全体の集合 Π が集合 Γ に含まれるように正の数 q, a が取られているとする．また，不等式 (14) をみたすようなどんな点 $(t, \boldsymbol{x})$ に対しても不等式 (15) が成り立っているものとする．

最後に，不等式 (16), (19), (22) をみたす任意の正の数を r とする．このとき，(t_0, x_0) を初期値にもつ方程式 (3) の解が区間 $|t-t_0|<r$ において存在する．しかもこの解は (23) 式によって帰納的に定義される関数列 (24)——その各関数は不等式 (25) をみたしている——の極限としてえられる．

定理3の証明

定理3を証明することにしよう．この定理は，正規形の線形方程式系

$$\dot{x}^i=\sum_{j=1}^{n}a_j^i(t)x^j+b^i(t)=f^i(t, x^1, \cdots\cdots, x^n), \qquad i=1, \cdots\cdots, n, \tag{27}$$

の係数 $a_j^i(t)$ および自由項 $b^i(t)$ が区間 $q_1<t<q_2$ で定義されかつ連続ならば，任意の

$$t_0, x_0^1, \cdots\cdots, x_0^n \qquad (q_1<t_0<q_2) \tag{28}$$

を初期値とする解が区間 $q_1<t<q_2$ 全体で存在する，というものである．まず，つぎのことをしめそう：

定理2の証明に使われた作用素 A——しかしこんどは方程式系 (27) の右辺をもちいて定義される——によって，区間 $q_1<t<q_2$ において収束するベクトル関数列

$$\varphi_0(t), \varphi_1(t), \cdots\cdots, \varphi_i(t), \cdots\cdots \tag{29}$$

をつくれば，この関数列はこの区間内の任意の閉区間において一様収束する．

ここで，$\varphi_0(t)$ としては区間 $q_1<t<q_2$ で定義された任意の連続なベクトル関数をとることができる．逐次近似法によるため，$\|\varphi_{i+1}-\varphi_i\|$ $(i=0, 1, 2, \cdots\cdots)$ の値をもっと正確に評価する必要がある．なお，このときにわかることであるが，こんどの場合には逐次近似法は縮小写像法の枠にははいらないのである．

微分方程式系 (27) と初期値 (28) とから出発して，関係式 (10), (11) によって定義される作用素を A とする．明らかに，区間 $q_1<t<q_2$ で定義された任意の連続関数に作用素 A をほどこすことができる．A] からわかるように，初期条件 (28) をもつ系 (27) は，作用素 A をもちいてあらわされた方程式

$$\varphi=A\varphi \tag{30}$$

に同値であり，(30) の解は区間 $q_1<t<q_2$ 全体で存在することがわかる．帰納的な関係：

$$\varphi_{i+1}=A\varphi_i, \qquad i=0,1,2,\cdots\cdots \tag{31}$$

によって定義される列 (29) の各関数は区間 $q_1<t<q_2$ 全体で定義される．

区間 $q_1<t<q_2$ に含まれかつ点 t_0 を内点とする任意の閉区間を $r_1\leqq t\leqq r_2$ とする，すなわち

$$q_1<r_1<t_0<r_2<q_2.$$

関数列 (29) が区間 $r_1\leqq t\leqq r_2$ において方程式 (30) の解に一様収束することをしめそう．方程式 (27) の右辺に対しては

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j}=a^i_j(t)$$

であるから，適当にとった正の数 K に対して，不等式

$$\left|\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right|\leqq K, \qquad i,j=1,\cdots\cdots,n,$$

が $r_1\leqq t\leqq r_2$ において成り立つ．関数 $\varphi_1(t)$ は区間 $r_1\leqq t\leqq r_2$ で連続であるから，この区間において，不等式

$$|\varphi_1(t)-\varphi_0(t)|\leqq C$$

が成り立つ．ここに C は定数である．さらに，この同じ区間において，つぎつぎに次式がえられる（(5)，(6) を見よ）：

$$|\varphi_2(t)-\varphi_1(t)|=\left|\int_{t_0}^t(\boldsymbol{f}(\tau,\varphi_1(\tau))-\boldsymbol{f}(\tau,\varphi_0(\tau)))d\tau\right|$$

$$\leqq\left|\int_{t_0}^t|\boldsymbol{f}(\tau,\varphi_1(\tau))-\boldsymbol{f}(\tau,\varphi_0(\tau))|d\tau\right|\leqq n^2KC|t-t_0|\,;$$

$$|\varphi_3(t)-\varphi_2(t)|=\left|\int_{t_0}^t(\boldsymbol{f}(\tau,\varphi_2(\tau))-\boldsymbol{f}(\tau,\varphi_1(\tau)))d\tau\right|$$

$$\leqq\left|\int_{t_0}^t|\boldsymbol{f}(\tau,\varphi_2(\tau))-\boldsymbol{f}(\tau,\varphi_1(\tau))|d\tau\right|\leqq\frac{(n^2K)^2C}{2!}|t-t_0|^2\,;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|\varphi_{i+1}(t)-\varphi_i(t)|=\left|\int_{t_0}^t (f(\tau,\varphi_i(\tau))-f(\tau,\varphi_{i-1}(\tau)))d\tau\right|$$
$$\leqq\left|\int_{t_0}^t |f(\tau,\varphi_i(\tau))-f(\tau,\varphi_{i-1}(\tau))|d\tau\right|\leqq\frac{(n^2K)^iC}{i!}|t-t_0|^i.$$

これより

$$\|\varphi_{i+1}-\varphi_i\|\leqq C\frac{(n^2K(r_2-r_1))^i}{i!}$$

となる．$\sum_{i=0}^{\infty}C\frac{(n^2K(r_2-r_1))^i}{i!}<+\infty$ であるから，関数列 (29) は区間 $r_1\leqq t\leqq r_2$ において連続関数 $\varphi(t)$ に一様収束する．この関数に対しては

$$\|A\varphi_i-A\varphi\|\leqq\max_{r_1\leqq t\leqq r_2}\left|\int_{t_0}^t |f(\tau,\varphi_i(\tau))-f(\tau,\varphi(\tau))|d\tau\right|$$
$$\leqq n^2K(r_2-r_1)\|\varphi_i-\varphi\|$$

となる．ゆえに関数列

$$A\varphi_0,\ A\varphi_1,\ \cdots\cdots,\ A\varphi_i,\ \cdots\cdots$$

は区間 $r_1\leqq t\leqq r_2$ 上で関数 $A\varphi$ に一様収束する．関係式 (31) において極限移行すれば，

$$A\varphi=\varphi$$

がえられる．

$r_1\leqq t\leqq r_2$ は点 t_0 を含み区間 $q_1<t<q_2$ に含まれる任意の区間であったから，関数列 (29) は区間 $q_1<t<q_2$ の各点において収束する．したがって，関数 $\varphi(t)$ は区間 $q_1<t<q_2$ 全体で存在しかつこの区間において方程式 (30) の解になる．これで定理 3 が証明された．

定理 3 の証明法を利用して，あとで必要になる重要な命題をつぎに証明しよう．

E〕 区間 $t_0\leqq t\leqq t_1$ で定義された連続な（スカラー）関数 $u(t)$ が積分不等式

$$u(t)\leqq\int_{t_0}^t(\alpha u(\tau)+\beta)d\tau,\qquad \alpha>0,\ \beta>0, \tag{32}$$

をみたせば，$u(t)$ はつぎの不等式をみたす：

$$u(t) \leqq \frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha(t-t_0)}-1). \tag{33}$$

このことを証明するため，積分不等式 (32) とともに積分方程式

$$v(t)=\int_{t_0}^{t}(\alpha\, v(\tau)+\beta)d\tau \tag{34}$$

を考え，$u(t) \leqq v(t)$ となることをしめそう．このため，積分方程式 (34) を逐次近似法によって解くことにする．(34) の被積分関数は $v(t)$ の 1 次式であるから，逐次近似の関数列は区間 $t_0 \leqq t \leqq t_1$ 全体で一様収束する（定理 3 の証明を見よ）．逐次近似列の最初の関数としては $v_0(t)=u(t)$ をとって

$$v_{i+1}(t)=\int_{t_0}^{t}(\alpha v_i(\tau)+\beta)d\tau \tag{35}$$

とおく．i に関する数学的帰納法によって，各関数 $v_i(t)$ はつぎの積分不等式をみたすことを証明しよう：

$$v_i(t) \leqq \int_{t_0}^{t}(\alpha v_i(\tau)+\beta)d\tau. \tag{36}$$

$i=0$ の場合には $v_0(t)=u(t)$ であるからこの不等式はたしかに成り立つ ((32) を見よ)．(36) が関数 $v_i(t)$ に対して成り立つと仮定して，この不等式が $v_{i+1}(t)$ に対しても成り立つことを証明しよう．帰納法の仮定から

$$v_{i+1}(t)=\int_{t_0}^{t}(\alpha v_i(\tau)+\beta)d\tau \geqq v_i(t)$$

すなわち

$$v_{i+1}(t) \geqq v_i(t) \tag{37}$$

がえられる．α は正の数であるから，(35) によって

$$v_{i+1}(t) \leqq \int_{t_0}^{t}(\alpha v_{i+1}(\tau)+\beta)d\tau$$

となる．これで各関数 $v_i(t)$ は不等式 (36) をみたすことが証明された．と同時に，不等式 (37) が成り立つこともわかった．これより，関数列 $v_0(t)=u(t)$, $v_1(t), \cdots\cdots, v_i(t), \cdots\cdots$ の極限関数 $v(t)$ はどの関数 $v_i(t)$ よりも小さくないこと，とくに $v(t) \geqq u(t)$ であることがわかる．さて，**E**] を証明するには，積分方程式 (34) の解 $v(t)$ が不等式 (33) の右辺と一致することを証明すれば

十分である．ところが §20 の A] によって，方程式 (34) の解 $v(t)$ は微分方程式

$$\dot{v}(t)=\alpha v(t)+\beta$$

を初期条件 $v(t_0)=0$ のもとで解いたときの解すなわち不等式 (33) の右辺にほかならない．これで E] が証明された．

§22. 延長不能な解

§3 において延長不能な解という概念が導入されたが（§3 の A] を見よ)，ここでは定理 2 をもちいてまったく初等的に，どんな解も延長不能な解にまで延長されることをしめそう（A] を見よ)．この意味において，延長不能な解だけを考えてよい．また，B], C] においては延長不能な解の 1 つの重要な性質が述べられる．これはあとの § で応用される．

正規形の方程式系（§21 の（1),（3）を見よ）をベクトルの記法をもちいて書きあらわしたものを

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) \qquad (1)$$

としよう．この右辺はその偏導関数 $\dfrac{\partial f^i(t, \boldsymbol{x})}{\partial x^j}$ とともに $(t, x^1, \cdots\cdots, x^n)$-空間 R のある開集合 Γ で定義されかつ連続であると仮定する．

A] 1) Γ の任意の点を初期値とする（1）の延長不能な解が存在する．

2) もしも方程式（1）のある延長不能な解が方程式（1）のもう 1 つの解と少なくともある 1 点 t において一致すれば，前者は後者の延長である．

3) もしも方程式（1）の 2 つの延長不能な解が少なくとも 1 点 t において一致すれば，これら 2 つの解は完全に一致する．すなわち両者は同一の定義区間をもち，かつそこにおいて相等しい．

A] を証明しよう．$(t_0, \boldsymbol{x}_0)$ を Γ の任意の点とする．$t_0, \boldsymbol{x}_0$ を初期値とする方程式（1）のすべての解の延長になっているような，$t_0, \boldsymbol{x}_0$ を初期値とする（1）の解 $\boldsymbol{x}=\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)$ をつくろう．

$t_0, \boldsymbol{x}_0$ を初期値とする方程式（1）の解をその定義区間とともに考えて，これらの区間の右の端点全体の集合を R_2 で，左の端点全体の集合を R_1 であら

わすことにする．集合 R_2 の上限を m_2 で（とくに $m_2=+\infty$ となることも起こりうる），また，集合 R_1 の下限を m_1 であらわそう（$m_1=-\infty$ となることもありうる）． t_0, x_0 を初期値にもち区間 $m_1<t<m_2$ で定義された方程式（1）の解 $x=\tilde{\varphi}(t)$ をつくってみよう．t^* をこの区間の任意の点とする．議論を明確にするため $t_0\leqq t^*$ であるとしよう．m_2 は集合 R_2 の上限であるから，t_0, x_0 を初期値とする方程式（1）の解でその定義区間が t^* を含むようなもの $x=\psi(t)$ が存在する．このとき $\tilde{\varphi}(t^*)=\psi(t^*)$ とおこう．こうして定義される関数 $\tilde{\varphi}$ の t^* における値は解 $x=\psi(t)$ の取りかたによらない．実際，解 $x=\psi(t)$ のかわりに，t_0, x_0 を初期値とする（1）の解でその定義区間がやはり t^* を含むようなもの $x=\chi(t)$ を取ったとすると，一意性（定理2を見よ）によって $\psi(t^*)=\chi(t^*)$ となるはずである．したがって関数 $\tilde{\varphi}(t)$ は区間 $m_1<t<m_2$ 全体で一意的に定義される．しかも $\tilde{\varphi}(t)$ は t_0, x_0 を初期値とする方程式（1）の解である．なぜなら，区間 $m_1<t<m_2$ の各点 t^* の近傍において関数 $\tilde{\varphi}(t)$ はそのつくりかたから方程式（1）のある解と一致しているからである．

いま $x=\varphi(t)$ を，t_0, x_0 を初期値にもち区間 $r_1<t<r_2$ で定義された方程式（1）の解とする．そうすれば r_1 は集合 R_1 に属し，r_2 は集合 R_2 に属するから $m_1\leqq r_1, r_2\leqq m_2$ である．すなわち区間 $r_1<t<r_2$ は区間 $m_1<t<m_2$ に含まれる．解 $\varphi(t)$ と $\tilde{\varphi}(t)$ とは同一の初期値をもつから，定理2によって，両者は双方の定義域の共通部分すなわち区間 $r_1<t<r_2$ において完全に一致する．これはまさに，解 $\tilde{\varphi}(t)$ が解 $\varphi(t)$ の延長であることを意味している．

こうしてつくられた解は明らかに延長不能である．実際，解 $\psi(t)$ が解 $\tilde{\varphi}(t)$ の延長であったとすれば，t_0, x_0 を解 $\psi(t)$ の初期値と考えることができる．そうすると，すでに証明したように，$\tilde{\varphi}(t)$ は $\psi(t)$ の延長でなければならない．このことは $\varphi(t)$ と $\psi(t)$ とが完全に一致することを意味する．同様な考え方によって，$\tilde{\varphi}(t)$ は t_0, x_0 を初期値とするただ1つの延長不能な解であることがわかる．

つぎに，延長不能な解 $\tilde{\varphi}(t)$ がもう1つの解と少なくともある1点 t におい

て一致したとしよう．このある1点を t_0 とし，$\tilde{\varphi}(t_0)=x_0$ とおく．そうすれば t_0, x_0 は延長不能な解 $\tilde{\varphi}(t)$ と $\varphi(t)$ との初期値と考えられる．すでに証明したことから，解 $\tilde{\varphi}(t)$ は解 $\varphi(t)$ の延長となる．もしも $\varphi(t)$ が延長不能であれば，まったく同様な考え方で $\varphi(t)$ は $\tilde{\varphi}(t)$ の延長となり，したがって $\varphi(t)$ と $\tilde{\varphi}(t)$ とは完全に一致する．これで **A**］が証明された．

B］ E を開集合 Γ に含まれている（空間 R の）有界閉集合とし，$x=\tilde{\varphi}(t)$ は区間 $m_1<t<m_2$ で定義された方程式（1）の延長不能な解（**A**］を見よ）とする．そうすれば適当に r_1, r_2 $(m_1<r_1<r_2<m_2)$ をとって，t が区間 $r_1\leqq t\leqq r_2$ の外にあるかぎり空間 R の点 $(t, \tilde{\varphi}(t))$ は集合 E の外にあるようにできる．

以下においては，適当な数 $r_2<m_2$ をとれば，$r_2<t<m_2$ なる t に対して点 $(t, \tilde{\varphi}(t))$ は集合 E に属さないことを証明する．数 r_1 の存在も同様に証明できる．もしも $m_2=+\infty$ であれば，上のような数 r_2 の存在は明らかである．というのは，$t\to+\infty$ のときにはその第1成分がちょうど t であるような点 $(t, \tilde{\varphi}(t))$ は必然的に有界な集合 E の外に出てしまうからである．したがって $m_2<+\infty$ と仮定し，数 r_2 の存在を証明しよう．その際われわれは §21 の **D**］で述べた数 r を利用する．空間 R にはユークリッド的距離を導入しておく．E は有界閉集合であり，開集合 Γ の補集合は閉集合であるから，集合 E と集合 Γ の補集合との距離 ρ は正である（§32 の例3を見よ）．いま，集合 E からの距離が $\frac{1}{2}\rho$ を越えない（空間 R の）点全体の集合を E^* であらわせば，E^* は Γ に含まれる有界閉集合となるから，方程式系（1）の右辺およびそれらの x^i $(i=1, \cdots\cdots, n)$ に関する偏導関数は E^* で有界である．したがって，E^* の任意の点 (t, x) に対して不等式

$$|f(t, x)|\leqq M, \qquad \left|\frac{\partial f^i(t, x)}{\partial x^j}\right|\leqq K, \qquad i, j=1, 2, \cdots\cdots, n, \tag{2}$$

が成り立つ．ここに M, K はある正の数である．いま2つの正の数 q, a を $q^2+a^2<\frac{\rho^2}{4}$ となるように取ろう．(t_0, x_0) を集合 E の任意の点とし，不等式 $|t-t_0|\leqq q$, $|x-x_0|\leqq a$ をみたす点 (t, x) 全部の集合を Π とすれば，明ら

かに，Π は E^* に含まれるから，集合 Π のどんな点 $(t, \boldsymbol{x})$ に対しても不等式（2）が成り立つ．したがって，数 r が §21 の不等式 (16), (19), (22) をみたしていれば，$t_0, \boldsymbol{x}_0$ を初期値にもち区間 $|t-t_0|<r$ で定義された（1）の解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ が存在する．ここで重要なのは，この数 r が集合 E のどんな点 $(t_0, \boldsymbol{x}_0)$ に対しても同一だということである．さて，r_2 として m_2-r をとることができることをしめそう．仮りにそうすることができないとしてみると，ある $t_0>m_2-r$ に対して点 $(t_0, \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t_0))$ は集合 E に属することになる．そうすれば t_0, $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t_0)$ は解 $\boldsymbol{x}=\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)$ の初期値と考えられ，上に述べたことから，区間 $|t-t_0|<r$ は区間 $m_1<t<m_2$ に含まれなければならない．ところがこのことは $t_0>m_2-r$ に矛盾する．これで B］が証明された．

自律系に対しては B］と同様な命題 C］が B］からただちにみちびかれる．自律系をベクトルの記法によって

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \qquad (3)$$

と書こう．この右辺は，$x^1, \cdots\cdots, x^n$ に関するその偏導関数とともに $(x^1, \cdots\cdots, x^n)$-空間 S 内のある開集合 Δ において連続であるとする．

C］ F は空間 S の有界閉集合で Δ にすっかり含まれているものとし，$\boldsymbol{x}=\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)$ はその定義区間が $m_1<t<m_2$ であるような方程式（3）の延長不能な解とする．もしも $m_2<\infty$ であれば，$m_1<r_2<m_2$ であるような数 r_2 が存在して，$r_2<t<m_2$ であるかぎり点 $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)$ は集合 F の外にある．まったく同様に，$m_1>-\infty$ ならば，$m_1<r_1<m_2$ であるような数 r_1 が存在して，$m_1<t<r_1$ であるかぎり点 $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)$ は集合 F の外にある．

C］を証明する際，$m_2\neq\infty$ の場合だけを考えることにして数 r_2 の存在を証明しよう．点 $(t, \boldsymbol{x})$（ただし $\boldsymbol{x}$ は S の点）全体からなる空間 R において，任意の数 t と Δ の点 $\boldsymbol{x}$ とによって $(t, \boldsymbol{x})$ と書ける点全体のつくる開集合を Γ とする．また m は不等式 $m_1<m<m_2$ をみたすものとする．$m\leqq t\leqq m_2$ でかつ $\boldsymbol{x}$ は F の点であるとき点 $(t, \boldsymbol{x})$ 全体のつくる集合を E であらわせば，明らかに E は有界閉集合であって Γ に含まれる．B］によれば，ある数 r_2 が存在して $r_2<t<m_2$ であるような t に対しては点 $(t, \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t))$ は集合 E に属

さない．この際もちろん $m<r_2$ と仮定してさしつかえない．そうすれば，$r_2<t<m_2$ のとき当然不等式 $m\leqq t\leqq m_2$ が成り立つから，$r_2<t<m_2$ をみたす t に対して点 $(t,\tilde{\varphi}(t))$ が集合 E に属さないのは点 $\tilde{\varphi}(t)$ が集合 F に属さない場合にかぎる．これで **C**〕が証明された．

例

1. この§の結果を説明するため，1階の自律方程式

$$\dot{x}=\frac{1}{f(x)} \tag{4}$$

を考察しよう．ただし $f(x)$ は多項式でかつその根はすべて実の単根であるとし，これらを小さいものから順にならべたものを $a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n$ とする．方程式（4）の相空間は直線 P であって，点 $a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n$ においては方程式（4）の右辺は無限大になるから，開集合 Δ に相当するものは，$a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n$ をのぞいた直線 P 上の点全部の集合である．いま

$$F(x)=\int_0^x f(\xi)\,d\xi$$

とおけば，方程式（4）のすべての解は

$$F(x)=t+C$$

とあらわされる．自律方程式の解のあらわす軌道は，時間を一定数だけズラせても同じ軌道であるから，方程式（4）のあらゆる軌道およびその上での点 $x(t)$ の運動は，

$$F(x)=t$$

という関係式で与えられる．区間 $a_1<x<a_2$ における点 $x(t)$ の運動を考えてみよう．区間 $a_1<x<a_2$ では $f(x)$ の符号は一定であるから，$F(a_1)\neq F(a_2)$ である．議論を明確にするため，

$$m_1=F(a_1)<m_2=F(a_2)$$

と仮定する．容易にわかるように，t が区間 $m_1<t<m_2$ 全体を動くとき，点 $x(t)$ は区間 $a_1<x<a_2$ 全体を動く．これより $x(t)$ は $m_1<t<m_2$ をその定義区間とする延長不能な解であることがわかる．この場合，この区間の両端点は有限で，t が区間 $m_1<t<m_2$ の端点に近づくとき点 $x(t)$ は領域 Δ の境界点に近づく．

2. 命題 **B**〕は，延長不能な解の定義区間がなぜ右側または左側から制限されてしまうのかという問に対して，ある意味での解答を与えるものである．簡単のため，集合 Γ は有界であるとして，延長不能な解 $x=\tilde{\varphi}(t)$ の挙動をしらべてみよう．集合 Γ の境界を G であらわすことにする．

$m_1<t<m_2$ を延長不能な解 $x=\tilde{\varphi}(t)$ の定義区間とする．Γ は有界であるから，m_1, m_2 はともに有限である．$t\to m_2$ のとき点 $(t,\tilde{\varphi}(t))$ と集合 G との距離は 0 に収束す

ることを証明しよう．ε を任意の正の数とし，E_ε は集合 G からの距離が ε 以上であるような（集合 Γ の）点全体の集合とする．容易に証明されるように，E_ε は R の有界閉集合である．B］によれば，数 $r_2<m_2$ が存在して $r_2<t<m_2$ であるかぎり点 $(t,\tilde{\varphi}(t))$ は集合 E_ε に属さないから，この点と集合 G との距離は ε より小である．したがって $t\to m_2$ のとき点 $(t,\tilde{\varphi}(t))$ と G との距離は 0 に収束する．$t\to m_2$ のときに点 $(t,\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t))$ が集合 Γ の境界 G に近づくという事実こそ解 $\boldsymbol{x}=\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)$ がその定義区間の右の端点 m_2 を越えて延長できない原因なのである．

§23. 初期値とパラメータに関する解の連続性

与えられた方程式系の解が初期値に依存するということを考えに入れれば，解は独立変数と初期値との関数とみなされる．この多変数の関数の性質はいろいろな意味で重要である．この§では，この関数が多変数の関数として連続であることを証明する．解が初期値の関数として連続であるということは，方程式の右辺がいくつかのパラメータを含みかつそれらに関して連続ならば解は初期値を固定したときパラメータの連続関数となることを主張する定理に帰着して証明される．まずはじめに，この定理を証明しよう．

パラメータに関する解の連続性

右辺がパラメータ $\mu^1,\cdots\cdots,\mu^l$ を含むような正規形の方程式系

$$\dot{x}^i=f^i(t,x^1,\cdots\cdots,x^n,\mu^1,\cdots\cdots,\mu^l),\qquad i=1,\cdots\cdots,n, \tag{1}$$

を考察しよう．（1）の右辺は $(t,x^1,\cdots\cdots,x^n,\mu^1,\cdots\cdots,\mu^l)$-空間 $\tilde{R}$ 内のある開集合 $\tilde{\Gamma}$ で定義されかつ変数 $x^1,\cdots\cdots,x^n$ に関する偏導関数

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j},\qquad i,j=1,\cdots\cdots,n, \tag{2}$$

とともに $\tilde{\Gamma}$ において連続であると仮定する．

$$\boldsymbol{x}=(x^1,\cdots\cdots,x^n)\ ;\quad \boldsymbol{\mu}=(\mu^1,\cdots\cdots,\mu^l)$$

$$\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})=(f^1(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu}),\cdots\cdots,f^n(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu}))$$

とおいて，系（1）をベクトルの記法をもちいて

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu}) \tag{3}$$

と書きあらわそう．

A] 空間 $\tilde{R}$ の点を (t, x, μ) であらわす．初期値 t_0, x_0 を固定して，点 (t_0, x_0, μ) が集合 $\tilde{\Gamma}$ に属するような μ 全体の集合を M とする．明らかに M は $(\mu^1, \cdots\cdots, \mu^l)$-空間の開集合である．$M$ の各点 μ に対して，t_0, x_0 を初期値にもつ方程式（3）の延長不能な解 $\varphi(t, \mu)$ を対応させ，その定義区間を $m_1(\mu)<t<m_2(\mu)$ とする（§22, A] を見よ)．関数 $\varphi(t, \mu)$ が定義されるような対 (t, μ) 全体の集合 T は，いうまでもなく，つぎの条件をみたすものとして記述される：μ は集合 M に属し，t は不等式 $m_1(\mu)<t<m_2(\mu)$ をみたす．

定理 13.『t_0, x_0 を初期値にもつような方程式(3)の延長不能な解を $\varphi(t, \mu)$ とし，この関数が定義されるような対 (t, μ) 全体の集合を T とすれば，T は $(t, \mu^1, \cdots\cdots, \mu^l)$-空間の開集合である．また，$\varphi(t, \mu)$ は集合 T 上で変数の対 (t, μ) の連続関数である』

T が開集合であることは自明なことではなく，また重要なことであることに注意する必要がある．

証明 (t^*, μ^*) を集合 T の任意の点とする．(t^*, μ^*) に十分近い点 (t, μ) は集合 T に属し，かつ差 $\varphi(t, \mu)-\varphi(t^*, \mu^*)$ は小さいことを証明しよう．そうすれば定理は証明されたことになる．

はじめに $t^*\geqq t_0$ としよう．解 $\varphi(t, \mu^*)$ は $t=t^*$ において定義されているから $t^*<m_2(\mu^*)$ である．ゆえに $t^*<r_2<m_2(\mu^*)$ であるような数 r_2 を取れば，もちろん解 $\varphi(t, \mu^*)$ は区間 $t_0\leqq t\leqq r_2$ 全体で定義される．t が区間 $t_0\leqq t\leqq r_2$ 全体を動くとき点 $(t, \varphi(t, \mu^*), \mu^*)$ は空間 $\tilde{R}$ においてある曲線 Q をえがく．a, b を2つの正の数とする．$\tilde{R}$ の点 (t, x, μ) で条件

$$t_0\leqq t\leqq r_2, \quad |x-\varphi(t, \mu^*)|\leqq a, \quad |\mu-\mu^*|\leqq b \tag{4}$$

をみたすもの全体の集合を $\tilde{\Pi}$ であらわそう．Q は開集合 $\tilde{\Gamma}$ に含まれている有界閉集合であるから，a, b を適当に取れば集合 $\tilde{\Pi}$ も $\tilde{\Gamma}$ に含まれるようにすることができる．以後，a, b はこのように取られていると考える．偏導関数（2）は $\tilde{\Pi}$ において連続であるから，それらの絶対値は $\tilde{\Pi}$ においてある数 K によっておさえられる．ゆえに §21 の不等式（6）によって，$\tilde{\Pi}$ の2点

$(t, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{\mu}), (t, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{\mu})$ に対して不等式

$$|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{\mu})-\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{\mu})| \leqq n^2K|\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1| \tag{5}$$

が成り立つ．さらに，関数 $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu})$ は $\tilde{\Pi}$ 上で一様連続（§32 の I］を見よ）であるから，正の数 ε が 0 に収束するとき，0 に収束するような（ε の）正の単調関数 $\beta_2(\varepsilon)$ が存在して，$\tilde{\Pi}$ の任意の 2 点 $(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}^*), (t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu})$ に対して

$$|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu})-\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}^*)| < \beta_2(|\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}^*|). \tag{6}$$

いま $t_0, \boldsymbol{x}_0$ を初期値とする方程式（3）の解を $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu})$（ただし $|\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}^*| \leqq b$）とする．§22 の B］によって，$t \to m_2(\boldsymbol{\mu})$ のとき点 $(t, \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu})$ は閉集合 $\tilde{\Pi}$ の外部に出てしまわなければならない．点 $(t, \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu})$ が集合 $\tilde{\Pi}$ の境界にはじめて到達するときの t の値を t_2 であらわそう．明らかに $t_0 < t_2 \leqq r_2$．$|\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu})-\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu}^*)|$ の値を区間 $t_0 \leqq t \leqq t_2$ 上で見つもってみよう．このため，パラメータの値 $\boldsymbol{\mu}$ と $\boldsymbol{\mu}^*$ とに対して，方程式（3）を積分方程式に書き換えて（§21 の A］を見よ），前者から後者をひくと

$$\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu})-\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu}^*)=\int_{t_0}^{t}(\boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{\varphi}(\tau, \boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu})-\boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{\varphi}(\tau, \boldsymbol{\mu}^*), \boldsymbol{\mu}^*))d\tau$$

$$(t_0 \leqq t \leqq t_2)$$

がえられる．この右辺の積分記号内の差を見つもってみると，

$$|\boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{\varphi}(\tau, \boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu})-\boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{\varphi}(\tau, \boldsymbol{\mu}^*), \boldsymbol{\mu}^*)| \leqq |\boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{\varphi}(\tau, \boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu})$$
$$-\boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{\varphi}(\tau, \boldsymbol{\mu}^*), \boldsymbol{\mu})|+|\boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{\varphi}(\tau, \boldsymbol{\mu}^*), \boldsymbol{\mu})-\boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{\varphi}(\tau, \boldsymbol{\mu}^*), \boldsymbol{\mu}^*)|$$

となる．この右辺の第 1 項は不等式（5）により，また第 2 項は不等式（6）によって評価される．これらの評価式を合わせれば，

$$|\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu})-\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu}^*)| \leqq \int_{t_0}^{t}[n^2K\cdot|\boldsymbol{\varphi}(\tau, \boldsymbol{\mu})-\boldsymbol{\varphi}(\tau, \boldsymbol{\mu}^*)|+\beta_2(|\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}^*|)]d\tau$$

がえられる．$u(t)=|\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu})-\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu}^*)|$ とおけば，§21 の E］によって，$t_0 \leqq t \leqq t_2$ のとき次式をうる：

$$|\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu})-\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu}^*)| \leqq \frac{\beta_2(|\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}^*|)}{n^2K}(e^{n^2K(t-t_0)}-1)$$

$$\leqq \frac{\beta_2(|\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}^*|)}{n^2K}(e^{n^2K(r_2-t_0)}-1)=C_2\beta_2(|\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}^*|). \tag{7}$$

いま ρ_2 は正の数で不等式

$$\rho_2 \leqq b \tag{8}$$

$$C_2\beta_2(\rho_2)<a \tag{9}$$

をみたし，$\boldsymbol{\mu}$ は不等式

$$|\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}^*|<\rho_2 \tag{10}$$

をみたしているものとする．このとき $t_2=r_2$ となること，したがって解 $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu})$ は区間 $t_0 \leqq t \leqq r_2$ 全体において定義されることをしめそう．

仮定より点 $(t_2, \boldsymbol{\varphi}(t_2, \boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu})$ は集合 $\tilde{\Pi}$ の境界上の点であるから，この点に対して（4）の不等式のうちのどれか1つは完全な等式にならなければならない．不等式（8），(10) からは $|\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}^*|<b$ がえられ，また，不等式 (10)，（9），（7）からは $|\boldsymbol{\varphi}(t_2, \boldsymbol{\mu})-\boldsymbol{\varphi}(t_2, \boldsymbol{\mu}^*)|<a$ がえられる．$t_2>t_0$ であるから，けっきょく（4）の不等式のうちで等式になりうるものは不等式 $t_2 \leqq r_2$ だけであり，それゆえ $t_2=r_2$ となる．これで，$t^* \geqq t_0$ のとき数 $r_2>t^*$ と正の数 ρ_2 とが存在して，$t_0 \leqq t \leqq r_2$ かつ $|\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}^*|<\rho_2$ のとき点 $(t, \boldsymbol{\mu})$ は集合 T に属し，しかも不等式（7）が成り立つことが証明された．

同様にして，$t^* \leqq t_0$ のとき数 $r_1<t^*$ と正の数 ρ_1 とが存在して，$r_1 \leqq t \leqq t_0$ かつ $|\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}^*|<\rho_1$ のとき点 $(t, \boldsymbol{\mu})$ は集合 T に属し，しかも（7）と同様な不等式

$$|\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu})-\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu}^*)|<C_1\beta_1(|\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}^*|) \tag{11}$$

が成り立つことが証明される．

以上のことから，点 $(t, \boldsymbol{\mu}^*)$ が集合 T に属していれば t^* と t_0 との大小関係のいかんにかかわらずつねに正の数 r, ρ が存在して，

$$|t-t^*|<r, \quad |\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}^*|<\rho \tag{12}$$

であるかぎり点 $(t, \boldsymbol{\mu})$ は集合 T に属し，かつ不等式

$$|\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu})-\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu}^*)|<C\beta(|\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}^*|) \tag{13}$$

が成り立つことがわかる．不等式 (12) をみたす点 $(t, \boldsymbol{\mu})$ 全体の集合は点

(t^*, μ^*) の近傍であるから，T は開集合である．

つぎに，関数 $\varphi(t, \mu)$ は点 (t^*, μ^*) において連続であることを証明しよう．このため，差 $\varphi(t, \mu)-\varphi(t^*, \mu^*)$ を見つもると

$$|\varphi(t, \mu)-\varphi(t^*, \mu^*)| \leqq |\varphi(t, \mu)-\varphi(t, \mu^*)|+|\varphi(t, \mu^*)-\varphi(t^*, \mu^*)|$$

において右辺の第1項は $|\mu-\mu^*|$ が小さければ小さい（(13) を見よ）．第2項は $\varphi(t, \mu^*)$ が t の連続関数であるから $|t-t^*|$ が小さければやはり小さい．けっきょく，$\varphi(t, \mu)$ は変数の対 t, μ の連続関数である．これで定理 13 が証明された．

初期値に関する解の連続性

さて，正規形の方程式系

$$\dot{x}^i=f^i(t, x^1, \cdots\cdots, x^n), \qquad i=1, \cdots\cdots, n, \tag{14}$$

を考えよう．この右辺およびその偏導関数

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j}, \qquad i, j=1, \cdots\cdots, n, \tag{15}$$

は $(t, x^1, \cdots\cdots, x^n)$-空間 R のある開集合 Γ において定義されかつ連続であると仮定する．系 (14) のベクトルによる記法を

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) \tag{16}$$

とする．

B] Γ の各点 $(\tau, \boldsymbol{\xi})$ には，$t_0=\tau$，$\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{\xi}$ を初期値にもち定義区間が（これは初期値 $\tau, \boldsymbol{\xi}$ に依存する）$m_1(\tau, \boldsymbol{\xi})<t<m_2(\tau, \boldsymbol{\xi})$ であるような方程式 (16) の延長不能な解 $\varphi(t, \tau, \boldsymbol{\xi})$ が対応する（§22, A] を見よ）．関数 $\varphi(t, \tau, \boldsymbol{\xi})$ が定義されるような（$(t, \tau, \xi^1, \cdots\cdots, \xi^n)$-空間の）点 $(t, \tau, \boldsymbol{\xi})$ 全体の集合 S は明らかに，つぎの条件をみたす点 $(t, \tau, \boldsymbol{\xi})$ の集合にほかならない：点 $(\tau, \boldsymbol{\xi})$ は集合 Γ に属し，t は不等式 $m_1(\tau, \boldsymbol{\xi})<t<m_2(\tau, \boldsymbol{\xi})$ をみたす．

定理 14. 『$\tau, \boldsymbol{\xi}$ を初期値とする方程式 (16) の延長不能な解を $\varphi(t, \tau, \boldsymbol{\xi})$ とし，この関数が定義されるような点 $(t, \tau, \boldsymbol{\xi})$ 全体の集合を S とすれば，S は $(t, \tau, \xi^1, \cdots\cdots, \xi^n)$-空間の開集合である．また，$\varphi(t, \tau, \boldsymbol{\xi})$ は集合 S 上で変数 $(t, \tau, \boldsymbol{\xi})$ の連続関数である』

つぎの C〕で述べる方法によって，上の定理は定理 13 から直接にみちびかれる．

C〕 $(\tau, \boldsymbol{\xi})$ を集合 Γ の任意の点とする．方程式 (16) の独立変数 t のかわりに，あたらしい変数 s を

$$t=\tau+s \tag{17}$$

によって導入する．また方程式 (16) の中の未知ベクトル関数 $\boldsymbol{x}$ のかわりに，あたらしい未知ベクトル関数 $\boldsymbol{y}$ を

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{y} \tag{18}$$

によって導入する．あたらしい変数によれば，方程式 (16) はつぎのように書きあらわされる：

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{ds}=\boldsymbol{f}(\tau+s, \boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{y}). \tag{19}$$

$t, \boldsymbol{x}$ を変数とする関数 $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ は開集合 Γ において定義されているのであるから，$s, \boldsymbol{y}, \tau, \boldsymbol{\xi}$ を変数とする関数

$$\boldsymbol{g}(s, \boldsymbol{y}, \tau, \boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{f}(\tau+s, \boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{y}) \tag{20}$$

は，点 $(\tau+s, \boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{y})$ が集合 Γ に属するという条件のもとで定義される．この条件は，容易にわかるように，$(s, \boldsymbol{y}, \tau, \boldsymbol{\xi})$-空間 $\tilde{R}$ の中のある開集合 $\tilde{\Gamma}$ を定め，この集合においてベクトル関数 (20) は連続でかつその各成分は変数 $y^1, \cdots\cdots, y^n$ に関して連続な偏導関数をもつ．いま，方程式 (19) において，$\tau, \boldsymbol{\xi}$ をパラメータとみなし，固定された初期条件 $s=0$, $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ のもとでの (19) の延長不能な解を

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\psi}(s, \tau, \boldsymbol{\xi}) \tag{21}$$

としよう．したがって

$$\boldsymbol{\psi}(0, \tau, \boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{0}. \tag{22}$$

(17), (18) によって，もとの変数にもどれば，関数

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t, \tau, \boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\psi}(t-\tau, \tau, \boldsymbol{\xi}) \tag{23}$$

がえられる．これは，ただちにたしかめられるように，方程式 (16) の解であって，初期条件

$$\varphi(\tau, \tau, \xi) = \xi$$

をみたしている．解 (21) が延長不能であることから，解 (23) も延長不能である．なぜなら，解 (23) を延長できたとすれば，解 (21) も延長できることになるからである．

定理 14 の証明 C〕によって，解と初期条件との関係は，方程式の右辺がパラメータを含む場合の解とパラメータとの関係（固定された初期条件のもとでの）に帰着される．後者は定理 13 によって明らかにされている．この定理によれば，右辺がパラメータ τ, ξ を含む方程式 (19) を一定の初期条件 $s_0=0$, $\boldsymbol{y}_0=\boldsymbol{0}$ のもとで解いたときの解 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\psi}(s, \tau, \xi)$ は，(s, τ, ξ)-空間の中のある開集合において定義されかつこの集合の上で変数 (s, τ, ξ) の連続関数である．初期値 τ, ξ をもつ方程式 (16) の延長不能な解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t, \tau, \xi)$ は，解 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\psi}(s, \tau, \xi)$ をもちいて (23) によってあらわされる．関数 $\boldsymbol{\psi}$ の変数 s, τ, ξ と関数 $\boldsymbol{\varphi}$ の変数 t, τ, ξ との間の関係は

$$t=s+\tau, \quad \tau=\tau, \quad \xi=\xi \tag{24}$$

で与えられる．(s, τ, ξ)-空間から (t, τ, ξ)-空間へのこのような変換はアフィン的であり，解 $\boldsymbol{\psi}$ の定義域 T は開集合であるから，この変換による T の像である解 $\boldsymbol{\varphi}$ の定義域 S も開集合となる（§32, 例 1 を見よ）．関数 $\boldsymbol{\varphi}$ の連続性は関数 $\boldsymbol{\psi}$ の連続性と変換の式 (23) とから出てくる．これで定理 14 が証明された．

定理 13, 14 はつぎのように 1 つにまとめられる：

定理 15. 『$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t, \tau, \xi, \boldsymbol{\mu})$ を初期値 τ, ξ のもとでの方程式（3）の延長不能な解とすれば，これは $(t, \tau, \xi, \boldsymbol{\mu})$-空間の中のある開集合で定義されかつそこで連続である』

この定理は，定理 14 と同様に，変数変換 (17), (18) と定理 13 とをもちいて証明される．

定理 13, 14 の系

定理 13, 14 は連続性に関する大域的な定理をふつうの述べ方とはいくらかちがった形で述べたものである．これらの連続性に関する大域的定理（定理

13, 14）は，従来の数学書にある述べ方とは本質的にちがうあたらしいものである．つぎの D］と E］は定理 13 および定理 14 からすぐにえられる系である．これらの系はその述べ方において，連続性に関する大域的定理のふつうの述べ方に近い．しかし，定理 13, 14 の述べ方のほうが，パラメータおよび初期値に関する解の連続性に関することがらを最もよくとらえていることに注意する必要がある． 命題 D］は本質的には定理 13 の証明の途中でえられているのであるが，その重要性を強調するため，ここでは定理からみちびくことにする．

D］ $\mu=\mu^*$ のとき，初期値 t_0, x_0 をもつ方程式（1）の解 $\varphi(t,\mu^*)$ が，t_0 を含む線分 $r_1\leqq t\leqq r_2$ で定義されていれば（このことは，線分 $r_1\leqq t\leqq r_2$ が解 $\varphi(t,\mu^*)$ の定義区間に含まれることを意味する），正の数 ρ が存在して，$|\mu-\mu^*|\leqq\rho$ ならば，初期値 t_0, x_0 をもつ延長不能な解 $\varphi(t,\mu)$ はやはり線分 $r_1\leqq t\leqq r_2$ において定義されている．また，どんな正の数 ε に対しても適当に正の数 $\delta<\rho$ をみつけて，$r_1\leqq t\leqq r_2$, $|\mu-\mu^*|<\delta$ のとき $|\varphi(t,\mu)-\varphi(t,\mu^*)|<\varepsilon$ となるようにすることができる．

この命題の証明に定理 13 を利用しよう．関数 $\varphi(t,\mu)$ が定義されるような対 (t,μ) 全部の集合 T は開集合であり，点 (r_1,μ^*), (r_2,μ^*) は T に属するから，十分小さい正の数 ρ を取れば，$|\mu-\mu^*|<\rho$ のとき点 (r_1,μ), (r_2,μ) は集合 T に属する．このことは，延長不能な解 $\varphi(t,\mu)$ の定義区間は線分 $r_1\leqq t\leqq r_2$ をすっかり含むことを意味する．すなわち解 $\varphi(t,\mu)$ はこの区間で存在する．$r_1\leqq t\leqq r_2$, $|\mu-\mu^*|\leqq\rho$ のときの点 (t,μ) 全体の集合 P は有界閉集合であって T に含まれているから，$\varphi(t,\mu)$ は P 上で一様連続である．このことから，D］の後半の主張がすぐにみちびかれる．

E］ $\xi=x_0$ のとき初期値 t_0,ξ をもつ方程式（16）の解 $\varphi(t,\xi)=\varphi(t,t_0,\xi)$ が，t_0 を含む線分 $r_1\leqq t\leqq r_2$ で定義されていれば，正の数 ρ が存在して，$|\xi-x_0|\leqq\rho$ ならば，延長不能な解 $\varphi(t,\xi)$ はやはり線分 $r_1\leqq t\leqq r_2$ において存在する．また，どんな正の数 ε に対しても，適当に正の数 $\delta<\rho$ をみつけて，$r_1\leqq t\leqq r_2$, $|\xi-x_0|<\delta$ のとき $|\varphi(t,\xi)-\varphi(t,x_0)|<\varepsilon$ となるようにすること

ができる.

この命題は，定理 13 から命題 D] がみちびかれたのとまったく同様に，定理 14 からえられる.

§24. 初期値とパラメータに関する解の微分可能性

まえの§では初期値とパラメータとに関する解の連続性が証明された．ここでは，ある仮定のもとでは解が初期値とパラメータとに関して微分可能になることがしめされる.

まえの§におけると同様に，まずはじめにパラメータに関する解の微分可能性を考察し，ついで §23 の命題 C] で述べた方法によってえられる結果をもとにして，初期値に関する解の微分可能性を証明しよう.

パラメータに関する解の微分可能性

§23 で考えたのと同じ微分方程式系

$$\dot{x}^i = f^i(t, x^1, \cdots\cdots, x^n, \mu^1, \cdots\cdots, \mu^l), \qquad i=1, \cdots\cdots, n, \tag{1}$$

を考察しよう；方程式の右辺は $(t, x^1, \cdots\cdots, x^n, \mu^1, \cdots\cdots, \mu^l)$-空間 $\tilde{R}$ のある開集合 $\tilde{\Gamma}$ において定義されかつその偏導関数 $\dfrac{\partial f^i}{\partial x^j}$ とともに連続であると仮定する．系（1）をベクトルの記法をもちいて書きあらわしたものを

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}) \tag{2}$$

としよう.

系（1）の右辺がパラメータに関して連続微分可能という仮定のもとで，解がパラメータ $\mu^1, \cdots\cdots, \mu^l$ に関して微分可能になることを証明しよう.

その証明のまえに，ふつう**アダマール** (Hadamard) **の補題**とよばれている命題 A] を証明する.

A］ $p+q$ 個の変数の関数 $g(t^1, \cdots\cdots, t^p, u^1, \cdots\cdots, u^q)$ が $(t^1, \cdots\cdots, t^p, u^1, \cdots\cdots, u^q)$-空間の領域 Δ において定義され，かつ Δ は変数 $u^1, \cdots\cdots, u^q$ に関して凸集合であるとする．いま

$$\boldsymbol{t} = (t^1, \cdots\cdots, t^p), \quad \boldsymbol{u} = (u^1, \cdots\cdots, u^q)$$

とおけば，上の関数は 2 つの変ベクトルの関数 $g(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{u})$ として書きあらわす

ことができる．定義域全体において関数 $g(\boldsymbol{t},\boldsymbol{u})$ も，その偏導関数 $\dfrac{\partial g(\boldsymbol{t},\boldsymbol{u})}{\partial u^j}$ $(j=1,\cdots\cdots,q)$ も連続であると仮定する．このとき，同一の座標 $\boldsymbol{t}$ をもつ領域 Δ の任意の2点 $(\boldsymbol{t},\boldsymbol{u}_1)$, $(\boldsymbol{t},\boldsymbol{u}_2)$ に対して，つぎの関係が成り立つ：

$$g(\boldsymbol{t},\boldsymbol{u}_2)-g(\boldsymbol{t},\boldsymbol{u}_1)=\sum_{j=1}^{q}h_j(\boldsymbol{t},\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)(u_2^j-u_1^j). \tag{3}$$

ここに，$h_j(\boldsymbol{t},\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)(j=1,\cdots\cdots,q)$ はすべての変数値 $\boldsymbol{t},\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2$ に関して（とくに $\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{u}_2$ のときにも）連続で，$h_j(\boldsymbol{t},\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})=\dfrac{\partial}{\partial u^j}g(\boldsymbol{t},\boldsymbol{u})$ である．

A］ を証明するため，

$$\boldsymbol{w}(s)=\boldsymbol{u}_1+s(\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{u}_1)\qquad(0\leqq s\leqq 1) \tag{4}$$

とおく．そうすれば，

$$g(\boldsymbol{t},\boldsymbol{u}_2)-g(\boldsymbol{t},\boldsymbol{u}_1)=g(\boldsymbol{t},\boldsymbol{w}(1))-g(\boldsymbol{t},\boldsymbol{w}(0))=\int_0^1\frac{\partial}{\partial s}g(\boldsymbol{t},\boldsymbol{w}(s))ds$$

となる．ここで，導関数 $\dfrac{\partial}{\partial s}g(\boldsymbol{t},\boldsymbol{w}(s))$ を計算しよう：

$$\frac{\partial}{\partial s}g(\boldsymbol{t},\boldsymbol{w}(s))=\frac{\partial}{\partial s}g(\boldsymbol{t},w^1(s),\cdots\cdots,w^q(s))=\sum_{j=1}^{q}\frac{\partial g(\boldsymbol{t},\boldsymbol{w}(s))}{\partial w^j}\cdot\frac{\partial w^j(s)}{\partial s}.$$

（4）により，明らかに

$$\frac{\partial w^j(s)}{\partial s}=u_2^j-u_1^j,\qquad j=1,\cdots\cdots,q,$$

であるから，

$$h_j(\boldsymbol{t},\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)=\int_0^1\frac{\partial g(\boldsymbol{t},\boldsymbol{w}(s))}{\partial w^j}ds$$

とおけば，公式（3）がえられる．仮定より関数 $\dfrac{\partial g(\boldsymbol{t},\boldsymbol{u})}{\partial u^j}$ は連続であるから，関数 $h_j(\boldsymbol{t},\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)$ もまた連続である．これで **A］** が証明された．

定理 16. 『定理 13 によって，初期値 t_0, $\boldsymbol{x}_0$ を固定したとき方程式（2）の延長不能な解 $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\mu})=(\varphi^1(t,\boldsymbol{\mu}),\cdots\cdots,\varphi^n(t,\boldsymbol{\mu}))$ は $(t,\mu^1,\cdots\cdots,\mu^l)$-空間のある開集合 T において定義され，かつその変数全体に関して連続である．もしも系（1）の右辺がある開集合 $\tilde{\Gamma}$ において変数 $\mu^1,\cdots\cdots,\mu^l$ に関して連続な偏導関数をもてば，偏導関数

$$\frac{\partial\varphi^i(t,\boldsymbol{\mu})}{\partial\mu^k},\qquad i=1,\cdots\cdots,n\,;\ k=1,\cdots\cdots,l,$$

は開集合 T 全体で存在しかつ連続である．さらに，偏導関数

$$\frac{\partial^2}{\partial t\partial\mu^k}\varphi^i(t,\boldsymbol{\mu}),\qquad i=1,\cdots\cdots,n\,;\ k=1,\cdots\cdots,l,$$

も T 全体で存在し，連続であり，しかも偏微分の順序を変えたものに等しい』

証明　偏導関数 $\dfrac{\partial\varphi^i}{\partial\mu^k}$ を求めるために差 $\varphi^i(t,\boldsymbol{\mu}_2)-\varphi^i(t,\boldsymbol{\mu}_1)$ を計算しよう．関数 $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\mu})$ は方程式（2）をみたしているから，この差の計算はもちろん

$$f^i(t,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{\mu}_2)-f^i(t,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{\mu}_1)$$

の計算に関係がある．これを，

$$\boldsymbol{t}=t,\quad \boldsymbol{u}=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu}),\quad g(\boldsymbol{t},\boldsymbol{u})=f^i(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})$$

と考えてアダマールの補題の助けをかりて計算しよう．この場合にアダマールの補題を適用するために，まずはじめに，変数 $(\boldsymbol{t},\boldsymbol{u})=(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})$ の空間の中で変数 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu}$ の対に関して凸であるような開集合 Δ を適当に定めることにする．われわれの目標は，集合 T の任意の点 $(t^*,\boldsymbol{\mu}^*)$ の近傍における偏導関数の存在とその連続性の証明である．さて，開集合 Δ を定めることにしよう．

解 $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\mu}^*)$ は $t=t^*$ において定義されているから，t_0 および t^* を内点とするある線分 $r_1\leqq t\leqq r_2$ $(r_1<t_0<r_2,\ r_1<t^*<r_2)$ があって，解 $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\mu}^*)$ はこの区間において存在する．t が線分 $r_1\leqq t\leqq r_2$ を動くとき，点 $(t,\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\mu}^*),\boldsymbol{\mu}^*)$ は開集合 $\tilde{\Gamma}$ において 1 つの連続曲線をえがく．2 つの正の数 $a,\ b$ を適当にえらんで，つぎの不等式：

$$r_1\leqq t\leqq r_2,\quad |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\mu}^*)|\leqq a,\quad |\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}^*|\leqq b \tag{5}$$

をみたす点 $(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})$ の全体からなる集合が開集合 $\tilde{\Gamma}$ にすっかり含まれるようにする．§23 の命題 **D**］によれば，正の数 ρ を，$2\rho<b$ かつ $|\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}^*|<2\rho$ のとき解 $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\mu})$ は線分 $r_1\leqq t\leqq r_2$ 全体で存在し，そこにおいて不等式 $|\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\mu})-\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\mu}^*)|<a$ が成り立つように取ることができる．さて，開集合 Δ を，つぎの条件をみたすような点 $(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})$ 全体の集合として定義しよう：

$$r_1<t<r_2,\quad |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\mu}^*)|<a,\quad |\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}^*|<2\rho.$$

明らかに，開集合 Δ は変数の対 (x, μ) に関して凸である．

偏導関数 $\dfrac{\partial \varphi^i}{\partial \mu^k}$ を計算するため，l 次元空間の中の μ^k 軸方向の単位ベクトルを e_k であらわそう．μ_1 は条件 $|\mu_1-\mu^*|<\rho$ をみたすあるベクトル，τ は条件 $|\tau|<\rho$ をみたす数とし，$\mu_2=\mu_1+\tau e_k$ とおく．そうするとベクトル μ_1, μ_2 は不等式

$$|\mu_1-\mu^*|<2\rho, \qquad |\mu_2-\mu^*|<2\rho$$

をみたす．したがって，線分 $r_1 \leqq t \leqq r_2$ 全体において不等式

$$|\varphi(t, \mu_1)-\varphi(t, \mu^*)|<a, \qquad |\varphi(t, \mu_2)-\varphi(t, \mu^*)|<a$$

が成り立つ．ゆえに，t が区間 $r_1<t<r_2$ を動くとき，点 $(t, \varphi(t, \mu_1), \mu_1)$ および $(t, \varphi(t, \mu_2), \mu_2)$ は開集合 Δ の中の曲線をえがく．差

$$f^i(t, \varphi(t, \mu_2), \mu_2)-f^i(t, \varphi(t, \mu_1), \mu_1)$$

にアダマールの補題を適用するとつぎの式がえられる：

$$f^i(t, \varphi(t, \mu_2), \mu_2)-f^i(t, \varphi(t, \mu_1), \mu_1)=\sum_{j=1}^{n} h^i_j(t, \mu_1, \tau)(\varphi^j(t, \mu_2)-\varphi^j(t, \mu_1))$$
$$+\sum_{k=1}^{l} h^i_{n+k}(t, \mu_1, \tau)(\mu_2^k-\mu_1^k). \qquad (6)$$

ここに関数 h^i_j $(j=1, \cdots\cdots, n+l)$ はアダマールの補題によって $t, \varphi(t, \mu_1)$, $\mu_1, \varphi(t, \mu_2), \mu_2$ に関して連続であるから当然 t, μ_1, τ に関して連続である（なぜなら，$\mu_2=\mu_1+\tau e_k$ であり，しかも $\varphi(t, \mu_1), \varphi(t, \mu_2)$ は t, μ_1 および t, μ_2 に関して連続だからである．定理 13 を見よ）．

$\dfrac{\partial \varphi^i}{\partial \mu^k}$ を計算するためには，明らかに，まず

$$\psi^i(t, \mu_1, \tau)=\frac{\varphi^i(t, \mu_2)-\varphi^i(t, \mu_1)}{\tau}, \quad \tau \neq 0,$$

をつくって，そこで $\tau \to 0$ のときの極限を求めればよい．系 (1) にその解 $x=\varphi(t, \mu_1)$ および $x=\varphi(t, \mu_2)$ を代入して，前者から後者を引けば，(6) によって，つぎの式がえられる：

$$\frac{\partial \psi^i(t, \mu_1, \tau)}{\partial t}=\sum_{j=1}^{n} h^i_j(t, \mu_1, \tau)\psi^j(t, \mu_1, \tau)+h^i_{n+k}(t, \mu_1, \tau)$$
$$i=1, \cdots\cdots, n. \qquad (7)$$

この関係式は

$$r_1<t<r_2,\quad |\mu_1-\mu^*|<\rho,\quad |\tau|<\rho,\quad \tau\neq 0,$$

という条件のもとで正しい．ゆえに，関数

$$\psi^1(t,\mu_1,\tau),\cdots\cdots,\psi^n(t,\mu_1,\tau) \tag{8}$$

は $\tau\neq 0$ のとき，初期条件

$$\psi^i(t_0,\mu_1,\tau)=\frac{\varphi^i(t_0,\mu_2)-\varphi^i(t_0,\mu_1)}{\tau}=\frac{x_0{}^i-x_0{}^i}{\tau}=0$$

をみたす線形方程式系

$$\dot{y}^i=\sum_{j=1}^{n}h_j^i(t,\mu_1,\tau)y^j+h_{n+k}^i(t,\mu_1,\tau) \tag{9}$$

の解である．

関数 $\psi^i(t,\mu_1,\tau)$ $(i=1,\cdots\cdots,n)$ は $\tau\neq 0$ のときにだけ定義されているのに対して，方程式系（9）そのものは $\tau=0$ の場合にも意味をもち，しかもその右辺は不等式

$$r_1<t<r_2,\quad |\mu_1-\mu^*|<\rho,\quad |\tau|<\rho \tag{10}$$

によって与えられる開集合において定義されかつ連続である．系（9）は線形であるから，定理 3 と定理 13 とにより，この系は初期値 $t_0, 0$ をもつ解

$$y^1=\chi^1(t,\mu_1,\tau),\cdots\cdots,y^n=\chi^n(t,\mu_1,\tau) \tag{11}$$

をもち，これは開集合 (10) で存在しかつ連続である．一意性の定理（定理 2）から，$\tau\neq 0$ のとき開集合 (10) 全体において等式

$$\psi^i(t,\mu_1,\tau)=\chi^i(t,\mu_1,\tau),\qquad i=1,\cdots\cdots,n,$$

が成り立つ．ところが，等式 (11) の右辺は $\tau=0$ の場合をも含めて開集合 (10) 全体において定義されかつ連続であるから，等式 (11) において $\tau\to 0$ のときの極限をとれば，次式がえられる：

$$\frac{\partial\varphi^i(t,\mu_1)}{\partial\mu_1^k}=\lim_{\tau\to 0}\psi^i(t,\mu_1,\tau)=\lim_{\tau\to 0}\chi^i(t,\mu_1,\tau)=\chi^i(t,\mu_1,0). \tag{12}$$

この等式の右辺は，開集合

$$r_1<t<r_2,\quad |\mu_1-\mu^*|<\rho \tag{13}$$

において定義されかつ連続であるから，けっきょく，この開集合全体において

偏導関数 $\dfrac{\partial\varphi^i(t,\mu_1)}{\partial{\mu_1}^k}$ が存在しかつ連続である．したがって，当然，この偏導関数は点 (t^*,μ^*) のある近傍において存在しかつ連続である．

さらに，関数 $y^i=\chi^i(t,\mu_1,0)$ $(i=1,\cdots\cdots,n)$ は $\tau=0$ のときの方程式系（9）をみたしているから，関数

$$y^i=\frac{\partial\varphi^i(t,\mu_1)}{\partial\mu_1^k},\qquad i=1,\cdots\cdots,n,$$

も方程式系（9）をみたす．ゆえに，これらの関数はすべて開集合（13）において，t に関して連続な偏導関数をもつ．すなわち，開集合（13）において

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial\mu_1^k}\varphi^i(t,\mu_1)\right]\tag{14}$$

が存在しかつ連続である．

系（1）に，開集合（13）において定義されているその解 $x^i=\varphi^i(t,\mu_1)$ $(i=1,\cdots\cdots,n)$ を代入すると

$$\frac{\partial\varphi^i(t,\mu_1)}{\partial t}=f^i(t,\varphi(t,\mu_1),\mu_1),\qquad i=1,\cdots\cdots,n,\tag{15}$$

となる．関数 $\varphi^j(t,\mu_1)$ $(j=1,\cdots\cdots,n)$ は，すでに証明したように，開集合（13）全体で μ_1^k に関して連続な偏導関数をもち，一方，系（1）の右辺は変数 $x^1,\cdots\cdots,x^n,\mu^1,\cdots\cdots,\mu^l$ に関して連続な偏導関数をもつから，関係式（15）の右辺は開集合（13）全体において μ_1^k に関して連続な偏導関数をもつ．したがって，関係式（15）の左辺もまた開集合（13）において連続な偏導関数

$$\frac{\partial}{\partial\mu_1^k}\left(\frac{\partial\varphi^i(t,\mu_1)}{\partial t}\right)\tag{16}$$

をもつ．

けっきょく，偏導関数（14），（16）はともに開集合（13）において連続であり，したがって，解析学のよく知られた定理により，それらはこの開集合上で一致する．点 (t^*,μ^*) は開集合（13）に属するから，これで定理 16 は完全に証明されたことになる．

初期値に関する解の微分可能性

§23 で（§23 の（14）を見よ）考察したのと同じ微分方程式系

$$\dot{x}^i = f^i(t, x^1, \cdots\cdots, x^n), \qquad i=1, \cdots\cdots, n. \tag{17}$$

を考えることにする．この右辺は $(t, x^1, \cdots\cdots, x^n)$-空間 R のある開集合 Γ において定義され，かつその偏導関数 $\dfrac{\partial f^i}{\partial x^j}$ とともに連続であるとしよう．系 (17) をベクトルの記法によって書きあらわしたものを

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) \tag{18}$$

とする．

§23 とちがい，ここでは未知関数 $\boldsymbol{x}$ に対する初期値 $\boldsymbol{\xi}$ だけを変数と考え，変数 t に対する初期値 τ は $\tau = t_0$ とおいて固定する．以後 τ に関する解の微分可能性は使わない．解が τ に関して微分可能となるためには系 (17) が補足的な条件（(17) の右辺の t に関する連続微分可能性）をみたす必要がある．

定理 17. 『

$$\boldsymbol{\varphi}(t, t_0, \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\xi}) = (\varphi^1(t, \boldsymbol{\xi}), \cdots\cdots, \varphi^n(t, \boldsymbol{\xi}))$$

を，初期値 $t_0, \boldsymbol{\xi}_0$ をもつ方程式 (18) の延長不能な解とする．定理 14 によれば，関数 $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\xi})$ は $(t, \xi^1, \cdots\cdots, \xi^n)$-空間のある開集合 S' において定義されかつそこで連続であるが，じつは S' 全体において連続な偏導関数

$$\frac{\partial \varphi^i(t, \boldsymbol{\xi})}{\partial \xi^j}, \qquad i, j = 1, \cdots\cdots, n,$$

が存在し，さらに偏導関数

$$\frac{\partial^2 \varphi^i(t, \boldsymbol{\xi})}{\partial t \partial \xi^j}, \qquad i, j = 1, \cdots\cdots, n,$$

もまた S' で連続であり，しかも微分の順序に関係しない』

証明 §23 の C］で述べた方法によって，証明は定理 16 に帰着される．§23 の方程式 (19) の右辺は変数 $y^1, \cdots\cdots, y^n, \xi^1, \cdots\cdots, \xi^n$ 全体に関して連続な偏導関数をもつから，定理 16 によって，関数 ψ^i（§23 の C］を見よ）の偏導関数

$$\frac{\partial \psi^i(t, t_0, \boldsymbol{\xi})}{\partial \xi^j}, \qquad i, j = 1, \cdots\cdots, n,$$

は開集合 S' 全体で存在しかつ連続であり，またそこにおいて偏導関数

$$\frac{\partial^2 \psi^i(t, t_0, \boldsymbol{\xi})}{\partial t \partial \xi^j}, \qquad i, j = 1, \cdots\cdots, n,$$

も連続であって，微分の順序に関係しない．解 $\varphi(t,\xi)=\varphi(t,t_0,\xi)$ は解 $\phi(t,t_0,\xi)$ から，§23 の式 (23) において $\tau=t_0$ としてえられるから，上に述べた関数 $\psi^i(t,t_0,\xi)$ の性質より，定理 17 に述べられている $\varphi^i(t,\xi)$ の諸性質が出てくる．

定理 16, 17 はつぎのように1つにまとめられる：

定理 18. 『系（1）の右辺は開集合 $\tilde{\Gamma}$ 全体でパラメータ $\mu^1,\cdots\cdots,\mu^l$ に関して連続微分可能とし，

$$\varphi(t,\xi,\mu)=(\varphi^1(t,\xi,\mu),\cdots\cdots,\varphi^n(t,\xi,\mu))$$

を，初期値 t_0,ξ をもつ方程式（2）の延長不能な解とする．関数 $\varphi(t,\xi,\mu)$ は (t,ξ,μ)-空間のある開集合で定義されかつそこで連続である（定理 15 を見よ)．このとき，偏導関数

$$\frac{\partial\varphi^i(t,\xi,\mu)}{\partial\xi^j},\quad \frac{\partial\varphi^i(t,\xi,\mu)}{\partial\mu^k},\qquad i,j=1,\cdots\cdots,n\ ;\ k=1,\cdots\cdots,l,$$

は開集合 $\tilde{\Gamma}$ 全体で存在しかつ連続であり，さらに偏導関数

$$\frac{\partial^2\varphi^i(t,\xi,\mu)}{\partial t\partial\xi^j},\quad \frac{\partial^2\varphi^i(t,\xi,\mu)}{\partial t\partial\mu^k}$$

も $\tilde{\Gamma}$ 全体で存在しかつ連続で，微分の順序に関係しない』

この定理も定理 17 と同じように，§23 の変数変換 (17), (18) ($\tau=t_0$ として）と定理 16 を使って証明される．

変 分 方 程 式

ときとしては，固定された $\mu=\mu^*$ に対し，パラメータ μ^k に関する方程式（2）の解 $\varphi(t,\mu)$ の導関数のある性質を知る必要が起こる．その場合には，変数 μ に対して方程式（2）の解 $\varphi(t,\mu)$ を求め，ついでそれを μ^k に関して微分するという必要はなく，じつは，ある線形微分方程式の系を考察することで用がたりるのである．同様なことが，固定された $\xi=x_0$ に対し，初期値 ξ^j に関する方程式 (18) の解 $\varphi(t,\xi)$ の導関数について考察する場合にもいえる．

B］ $\varphi(t,\mu)=(\varphi^1(t,\mu),\cdots\cdots,\varphi^n(t,\mu))$ を初期値 t_0,x_0 をもつ方程式（2）の延長不能な解とし，$m_1<t<m_2$ を $\mu=\mu^*$ のときの $\varphi(t,\mu)$ の定義区間と

する．もしも系（1）の右辺の偏導関数 $\dfrac{\partial f^i}{\partial \mu^k}$ が領域 $\tilde{\Gamma}$ において連続であれば，定理 16 によって，$\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}^*$ のときの偏導関数

$$\frac{\partial}{\partial \mu^k}\varphi^i(t, \boldsymbol{\mu}^*)=\psi^i_k(t)$$

は t の関数として区間 $m_1<t<m_2$ 全体で存在しかつ連続である．

$$f^i_j(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu})=\frac{\partial f^i(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu})}{\partial x^j}\ ;\ f^i_j(t)=f^i_j(t, \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu}^*), \boldsymbol{\mu}^*),$$

$$g^i_j(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu})=\frac{\partial f^i(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu})}{\partial \mu^k}\ ;\ g^i_k(t)=g^i_k(t, \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu}^*), \boldsymbol{\mu}^*),$$

とおこう．定理 13 によって，関数 $f^i_j(t)$, $g^i_k(t)$ は区間 $m_1<t<m_2$ 全体で定義されかつ連続である．区間 $m_1<t<m_2$ 上での線形微分方程式系

$$\dot{y}^i=\sum_{j=1}^n f^i_j(t)y^j+g^i_k(t) \tag{19}$$

を，$\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}^*$ のときの系（1）に対する（パラメータに関しての）変分方程式という．このとき，関数の系

$$y^1=\psi^1_k(t),\ \cdots\cdots,\ y^n=\psi^n_k(t) \tag{20}$$

は，初期条件

$$\psi^i_k(t_0)=0 \tag{21}$$

をみたす方程式 (19) の解である．

証明　系（1）にその解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu})$ を代入すれば，恒等式

$$\frac{\partial\varphi^i(t, \boldsymbol{\mu})}{\partial t}=f^i(t, \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu}) \tag{22}$$

がえられる．定理 16 によれば，この等式の両辺は $\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}^*$ のとき，区間 $m_1<t<m_2$ 全体で μ^k に関して連続な偏導関数をもち，しかも

$$\frac{\partial}{\partial \mu^k}\frac{\partial\varphi^i(t, \boldsymbol{\mu})}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\varphi^i(t, \boldsymbol{\mu})}{\partial \mu^k}$$

が成り立つ．$\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}^*$ のとき，恒等式 (22) を μ^k に関して微分すれば，上に述べたことから，関数の系 (20) は系 (19) の解になっていることがわかる．また，初期条件

$$\varphi^i(t_0, \mu)=x_0^i$$

を μ^k について微分してやれば，初期条件 (21) がえられる．これで B] が証明された．

C] $\varphi(t,\xi)=(\varphi^1(t,\xi),\cdots\cdots,\varphi^n(t,\xi))$ を，初期値 t_0,ξ をもつ方程式 (18) の延長不能な解とし，$m_1<t<m_2$ を $\xi=x_0$ のときの $\varphi(t,\xi)$ の定義区間とする．定理 17 によって，$\xi=x_0$ のときの偏導関数

$$\frac{\partial}{\partial\xi^j}\varphi^i(t,x_0)=\psi_j^i(t)$$

は t の関数として区間 $m_1<t<m_2$ 全体で存在しかつ連続である．区間 $m_1<t<m_2$ 上での線形微分方程式系

$$\dot{y}^i=\sum_{j=1}^n f_j^i(t)y^j \tag{23}$$

を，初期値 t_0,x_0 のときの系 (17) に対する（初期値に関しての）**変分方程式**という．このとき，関数の系

$$y^1=\psi_j^1(t),\cdots\cdots,y^n=\psi_j^n(t) \tag{24}$$

は，初期条件

$$\psi_j^i(t_0)=\delta_j^i \tag{25}$$

をみたす方程式 (23) の解である．ただし，$i\neq j$ のとき $\delta_j^i=0$, $\delta_i^i=1$.

関数の系 (24) が系 (23) の解になっていることは，B] とまったく同様に，(17) にその解 $x=\varphi(t,\xi)$ を代入してえられる恒等式を ξ^j について微分することによって証明される．初期条件 (25) は，初期条件

$$\varphi^i(t_0,\xi)=\xi^i$$

を ξ^j について微分することによってえられる．

例

1. 自律微分方程式系

$$\dot{x}^i=f^i(x^1,\cdots\cdots,x^n)=f^i(x),\qquad i=1,\cdots\cdots,n, \tag{26}$$

をベクトルの記法によって

$$\dot{x}=f(x) \tag{27}$$

と書こう．$a=(a^1,\cdots\cdots,a^n)$ をこの系の平衡点とする．ゆえに $f^i(a)=0$ で，関数の系

$x^1=a^1, \cdots\cdots, x^n=a^n$ は方程式系 (26) の解になっている．初期値 $0, \boldsymbol{\xi}$ をもつ方程式 (27) の解を

$$\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\xi})=(\varphi^1(t, \boldsymbol{\xi}), \cdots\cdots, \varphi^n(t, \boldsymbol{\xi}))$$

であらわす．C］によって，関数 $\varphi^i(t, \boldsymbol{\xi})$ の ξ^j に関する導関数の $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{a}$ における値

$$\frac{\partial}{\partial \xi^j}\varphi^i(t, \boldsymbol{a})=\psi^i_j(t) \tag{28}$$

を計算してみよう．

この場合，関数

$$f^i_j(t)=\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(\boldsymbol{a})=a^i_j$$

は定数であるから，変分方程式 (23) は定係数の同次な線形系

$$\dot{y}^i=\sum_{j=1}^n a^i_j y^j \tag{29}$$

であり，系 (29) の解である関数の系 (28) は容易に求められる．しかし，変数 $\boldsymbol{\xi}$ に対して解 $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\xi})$ を求めることは一般にむずかしい．

変分方程式 (29) は，平衡点 $\boldsymbol{a}$ の近傍における方程式 (27) の解の行動を研究する際に重要な役割を演じる．このことはつぎの章でわかる．そこでは，しかし，系 (29) は変分方程式系としてではなく，平衡点 $\boldsymbol{a}$ の近傍での系 (26) の線形化という形で出てくる．系 (26) の線形化はつぎのようにして行なわれる：未知関数 $x^1, \cdots\cdots, x^n$ のかわりに，あたらしい未知関数 $\delta x^1, \cdots\cdots, \delta x^n$ を，等式

$$x^i=a^i+\delta x^i, \qquad i=1, \cdots\cdots, n, \tag{30}$$

によって導入する．系 (26) に変数変換 (30) をおこない，その右辺をあたらしい未知関数 $\delta x^1, \cdots\cdots, \delta x^n$ に関してテーラー展開すれば，次式がえられる：

$$\frac{d}{dt}\delta x^i=f^i(\boldsymbol{a})+\sum_{j=1}^n\frac{\partial f^i(\boldsymbol{a})}{\partial x^j}\delta x^j+\cdots\cdots=\sum_{j=1}^n a^i_j\delta x^j+\cdots\cdots \tag{31}$$

ここで δx^i について2次以上の無限小である項は省略してある．系 (31) において δx^i の1次の項だけを残せば，系 (29) と同じ方程式系がえられる．

§25. 第 1 積 分

ここでは第1積分という概念を与え，かつ線形偏微分方程式に対する初期値問題を解くことにする．

第 1 積 分

正規形の自律方程式系

$$\dot{x}^i=f^i(x^1, \cdots\cdots, x^n), \qquad i=1, \cdots\cdots, n, \tag{1}$$

の右辺は，その偏導関数とともに $(x^1, \cdots\cdots, x^n)$-空間のある開集合 Δ で定義されかつ連続であると仮定する．また，この系のベクトルによる記法を

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{2}$$

とする．

A〕 関数

$$u(x^1, \cdots\cdots, x^n)=u(\boldsymbol{x})$$

は Δ に含まれたある開集合 G で定義され，かつ連続な偏導関数をもつとする．$u(\boldsymbol{x})$ にその軌道が G にすっかり含まれているような方程式（2）の任意の解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ を代入したとき，t に無関係な一定値がえられるならば，すなわち関数 $u(\boldsymbol{\varphi}(t))$ が解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ のとりかただけに依存して変数 t には関係しないならば，関数 $u(\boldsymbol{x})$ を方程式系（1）の**第1積分**という．系（1）の任意の第1積分 $u(\boldsymbol{x})$ は，条件

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial x^i}f^i(\boldsymbol{x})=0 \tag{3}$$

をみたし，逆に，条件（3）をみたすいかなる関数 $u(\boldsymbol{x})$ も系（1）の第1積分である．

系（1）の第1積分 $u(\boldsymbol{x})$ は条件（3）をみたすことを証明しよう．$\boldsymbol{\xi}$ を集合 G の任意の点，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\xi})$ を初期値 $0, \boldsymbol{\xi}$ をもつ方程式（2）の解とすれば，

$$0=\frac{d}{dt}u(\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\xi}))\bigg|_{t=0}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi^i}f^i(\boldsymbol{\xi})\,;$$

$\boldsymbol{\xi}$ は G の任意の点であったから，関係式（3）は G 全体で成り立つ．

逆に，関数 $u(\boldsymbol{x})$ に対して関係式（3）が成り立っているものとする．軌道が G に含まれているような方程式（2）の任意の解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ を関数 $u(\boldsymbol{x})$ に代入すると，1つの関数

$$v(t)=u(\boldsymbol{\varphi}(t))$$

がえられる．この関数を t について微分すると，

$$\frac{dv(t)}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u(\boldsymbol{\varphi}(t))}{\partial x^i}f^i(\boldsymbol{\varphi}(t))=0$$

となる．したがって $u(\varphi(t))$ は t に無関係な定数である．

以後，系（1）の第1積分は（1）の平衡点ではないような開集合 Δ の点 $\boldsymbol{a}$——

$$f(\boldsymbol{a})\neq 0 \tag{4}$$

——の近傍においてのみ考察される．すなわち，まったく局所的に考察される．

B］ 点 $\boldsymbol{a}$（(4)を見よ）のある近傍で定義された系（1）のいくつかの第1積分

$$u_1(\boldsymbol{x}), \cdots\cdots, u_k(\boldsymbol{x})$$

が点 $\boldsymbol{a}$ において独立である（または単に，独立である）というのは，関数行列式

$$\left(\frac{\partial u_i(\boldsymbol{a})}{\partial x^j}\right), \qquad i=1, \cdots\cdots, k\,;\ j=1, \cdots\cdots, n,$$

の階数が k に等しいことである．さて，つぎのことがわかる：点 $\boldsymbol{a}$（(4)を見よ）のある近傍において方程式系（1）の $n-1$ 個の独立な第1積分が存在する．これを証明しよう．$f(\boldsymbol{a})\neq 0$ であるから，その成分のうち少なくとも1つは0ではない．そこで，たとえば

$$f^n(\boldsymbol{a})\neq 0$$

と仮定しよう．$\boldsymbol{\xi}=(\xi^1, \cdots\cdots, \xi^{n-1}, a^n)$ を点 $\boldsymbol{a}$ の近傍の点とし，$\boldsymbol{x}=\varphi(t, \boldsymbol{\xi})$ を方程式（2）の初期値 $0, \boldsymbol{\xi}$ の解とする．この解は，つぎのように成分ごとに書きあらわすことができる：

$$x^i=\varphi^i(t, \xi^1, \cdots\cdots, \xi^{n-1}), \qquad i=1, \cdots\cdots, n. \tag{5}$$

この関係式を，未知数

$$\xi^1, \cdots\cdots, \xi^{n-1}, t \tag{6}$$

に関する方程式系と考えよう．$x^i=a^i$ $(i=1, \cdots\cdots, n)$ のとき，この方程式系は明らかに $\xi^1=a^1, \cdots\cdots, \xi^{n-1}=a^{n-1}$, $t=0$ という解をもち，しかもこの点において（5）の関数行列式は0にならない．

実際，

$$\varphi^i(0, \xi^1, \cdots\cdots, \xi^{n-1}) = \xi^i, \qquad i=1, \cdots\cdots, n-1,$$
$$\varphi^n(0, \xi^1, \cdots\cdots, \xi^{n-1}) = a^n,$$

であるから，

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi^i(0, a^1, \cdots\cdots, a^{n-1})}{\partial\xi^j} = \delta^i_j, \quad i=1, \cdots\cdots, n\ ;\ j=1, \cdots\cdots n-1\ ; \\ &\frac{\partial}{\partial t}\varphi^n(0, a^1, \cdots\cdots, a^{n-1}) = f^n(\boldsymbol{a}) \neq 0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

これで，関数行列式は0でないことがわかった．したがって，点 $\boldsymbol{a}$ のある近傍 G が存在して，G に属する各 $\boldsymbol{x}$ に対して方程式系（5）は未知数（6）について解くことができ（§33 を見よ），その解はつぎの形に書ける：

$$\xi^1 = u^1(\boldsymbol{x}), \cdots\cdots, \xi^{n-1} = u^{n-1}(\boldsymbol{x}),\ \ t = v(\boldsymbol{x}). \tag{8}$$

このとき，関数

$$u^1(\boldsymbol{x}), \cdots\cdots, u^{n-1}(\boldsymbol{x}) \tag{9}$$

は系（1）の第1積分であり，かつこれらは点 $\boldsymbol{a}$ において独立なことをしめそう．系（5）の関数行列はわかっているから（（7）を見よ），関数行列

$$\left(\frac{\partial u^i(\boldsymbol{a})}{\partial x^j}\right), \qquad i, j=1, \cdots\cdots, n-1,$$

は単位行列であることが容易にわかる．ゆえに関数系（9）は独立である．（9）の各関数は系（1）の第1積分であることをしめそう．そのためには，（9）の各関数に方程式（2）の解を代入したとき，それらが t には無関係な定数になることを証明すればよい．系（8）は系（5）の逆関数であるから，関数（9）は恒等式

$$u^i(\varphi(t, \boldsymbol{\xi})) = \xi^i, \qquad i=1, \cdots\cdots, n-1, \tag{10}$$

をみたす(§33 の例1を見よ)．けっきょく，(9)の各関数に解 $\boldsymbol{x}=\varphi(t, \boldsymbol{\xi})$ を代入すると t に無関係な値がえられる．さて，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ を近傍 G の中にある方程式（2）の任意の解とし，その初期値を $t_0, \boldsymbol{x}_0$ とする（$\boldsymbol{x}_0$ は G に属している）．系（5）は $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0$ のとき解けるのであるから，点 $\boldsymbol{x}_0$ をとおる解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\xi}_0)$ が存在し，したがって解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ はつぎのように書きあらわされる（§15 の **B**］を見よ）：

$$\varphi(t)=\varphi(t+c,\xi_0) \qquad (c \text{ は定数}).$$

ゆえに $x=\varphi(t)$ を関数 $u^i(x)$ に代入すれば，(10) によって，

$$u^i(\varphi(t))=u^i(\varphi(t+c,\xi_0))=\xi_0^i, \qquad i=1,\cdots\cdots,n-1.$$

これで B］が証明された．

C］
$$u^1(x),\cdots\cdots,u^{n-1}(x) \tag{11}$$
を点 a において独立な方程式系（1）の第1積分とし，

$$u^i(a)=b^i,\ i=1,\cdots\cdots,n-1;\ b=(b^1,\cdots\cdots,b^{n-1})$$

で，$w(x)$ は点 a の近傍で定義された系（1）のある第1積分とする．そうすれば，点 b のある近傍で定義された $n-1$ 変数 $y^1,\cdots\cdots,y^{n-1}$ の関数 $W(y^1,\cdots\cdots,y^{n-1})$ を見つけて，点 a のある近傍において恒等式

$$w(x)=W(u^1(x),\cdots\cdots,u^{n-1}(x)) \tag{12}$$

が成り立つようにすることができる．

これを証明しよう．A］によって，第1積分 $u^1(x),\cdots\cdots,u^{n-1}(x),w(x)$ はつぎの関係式をみたす：

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u^j(x)}{\partial x^i}f^i(x)=0, \qquad j=1,\cdots\cdots,n-1;$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial w(x)}{\partial x^i}f^i(x)=0.$$

ゆえに，これらの第1積分は独立ではない（(4) を見よ）．他方，第1積分 (11) は独立である．これより，解析学のよく知られた定理によって（§33 の例2を見よ），等式 (12) を成り立たせるような関数 W の存在がいえる．

もしも系（1）の第1積分のいくつかがわかっていれば，それだけ系（1）は解きやすくなる．つぎに，このことをもっと正確に述べよう．

D］ 自律方程式系（1）の点 a における $n-k$ 個の独立な第1積分を

$$u^{k+1}(x),\cdots\cdots,u^n(x) \tag{13}$$

とする．そのとき，関数 (13) をもちいて方程式系（1）の階数を $n-k$ だけ引きさげることができる，すなわち系（1）を k 階の自律方程式系でおきかえることができる．とくに $n-1$ 個の独立な第1積分がわかれば，自律系（1）

を1階の方程式に帰着させることができて，それは求積法によって解ける（§2の例2を見よ）．

これを証明しよう．第1積分（13）は独立であるから，関数行列

$$\left(\frac{\partial u^i(\boldsymbol{a})}{\partial x^j}\right),\qquad i=k+1,\cdots\cdots,n\;;\;j=1,\cdots\cdots,n,$$

の中には，0でない行列式をもつ $n-k$ 次の正方行列が含まれている．議論を明確にするため，行列

$$\left(\frac{\partial u^i(\boldsymbol{a})}{\partial x^j}\right),\qquad i,j=k+1,\cdots\cdots,n,$$

の行列式が0でないと考えよう．これらの第1積分をもちいて，点 $\boldsymbol{a}$ の近傍において，変数

$$x^1,\cdots\cdots,x^n$$

のかわりに，あたらしい変数

$$y^1,\cdots\cdots,y^n \tag{14}$$

を，つぎのように導入する：

$$y^1=x^1,\cdots\cdots,y^k=x^k,\quad y^{k+1}=u^{k+1}(\boldsymbol{x}),\cdots\cdots y^n=u^n(\boldsymbol{x}). \tag{15}$$

これらの式によって実際にあたらしい変数 $y^1,\cdots\cdots,y^n$ が導入されることは，系（15）の関数行列式が点 $\boldsymbol{a}$ の近傍で0にならないことからわかる（§33を見よ）．あたらしい変数系（14）によれば，系（1）はつぎの形になる：

$$\dot{y}^i=g^i(y^1,\cdots\cdots,y^n),\qquad i=1,\cdots\cdots,n. \tag{16}$$

ところが，(13) の各関数は条件（3）をみたしているのであるから，$i=k+1,\cdots\cdots,n$ のとき，

$$\dot{y}^i=\frac{d}{dt}u^i(x^1,\cdots\cdots,x^n)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u^i(\boldsymbol{x})}{\partial x^j}f^j(\boldsymbol{x})=0$$

となる．けっきょく，

$$g^{k+1}(\boldsymbol{y})=0,\cdots\cdots,g^n(\boldsymbol{y})=0.$$

このことから，系（16）は事実上 k 階の自律系になる．

1階線形偏微分方程式

関係式（3）は $x^1,\cdots\cdots,x^n$ を独立変数とする未知関数 $u(\boldsymbol{x})$ に関する偏微

分方程式と考えられる．B］と C］においてつぎのことがしめされた：$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\neq 0$ の場合には，点 $\boldsymbol{a}$ の近傍において方程式（3）の $n-1$ 個の独立な解が存在する．また，その $n-1$ 個の独立な解を知れば，他のいかなる解も (12) によってえられる．なお，(12) によって与えられるいかなる関数も方程式（3）の解であることは明らかである．この意味において，方程式（3）は解けたと考えることができる．けっきょく，方程式系（1）を解くことができれば，それと同時に方程式（3）をも解くことができるわけである．しかし方程式（3）を別の見地から解くこともできる．それは，方程式（3）またはより一般な方程式に対し**初期値問題**を考え，それを解くことなのである．

E］ 未知関数 $u(\boldsymbol{x})$ に関する偏微分方程式

$$\sum_{i=1}^{n} f^i(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x^i}=F(\boldsymbol{x},u) \tag{17}$$

を考える．ここに $F(\boldsymbol{x},u)$ は与えられた関数であって，その 1 階偏導関数はすべての変数に関して連続であると仮定する．また 1 つの $n-1$ 次元の曲面がパラメータ $t^1,\cdots\cdots,t^{n-1}$ によって，

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}(t^1,\cdots\cdots,t^{n-1}) \tag{18}$$

とあらわされ，かつこの曲面は $t^1=\cdots\cdots=t^{n-1}=0$ のとき点 $\boldsymbol{a}$ をとおるとする：$\boldsymbol{\xi}(0,\cdots\cdots,0)=\boldsymbol{a}$．さらに，曲面 (18) は微分可能で，点 $\boldsymbol{a}$ においてベクトル $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ に接しないと仮定する．すなわち，ベクトル

$$\frac{\partial\boldsymbol{\xi}(0,\cdots\cdots,0)}{\partial t^1},\ \cdots\cdots,\ \frac{\partial\boldsymbol{\xi}(0,\cdots\cdots,0)}{\partial t^{n-1}},\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) \tag{19}$$

は 1 次独立である．最後に，曲面 (18) 上で 1 つの関数

$$u_0(t^1,\cdots\cdots,t^{n-1}) \tag{20}$$

が与えられているとする．このとき，曲面 (18) 上では与えられた関数 (20) に一致するような方程式 (17) の解 $u(\boldsymbol{x})$ が，点 $\boldsymbol{a}$ の近傍において一意的に存在する：

$$u(\boldsymbol{\xi}(t^1,\cdots\cdots,t^{n-1}))=u_0(t^1,\cdots\cdots,t^{n-1}).$$

解 $u(\boldsymbol{x})$ を見つけるには，曲面 (18) 上の点を始点とする軌道を利用する．こ

のような軌道を方程式 (17) の**特性曲線**という．

E] を証明しよう．このため，方程式系（1）の相空間の点 $\boldsymbol{a}$ の近傍に，座標 $x^1, \cdots\cdots, x^n$ のかわりにあたらしい座標を導入する．曲面 (18) 上の点 $\boldsymbol{\xi}(t^1, \cdots\cdots, t^{n-1})$ を始点とする方程式（2）の解を（すなわち，$0, \boldsymbol{\xi}(t^1, \cdots\cdots, t^{n-1})$ を初期値とする解を）$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t, t^1, \cdots\cdots, t^{n-1})$ とする．これを成分ごとに書けば，つぎのようになる：

$$x^i=\varphi^i(t, t^1, \cdots\cdots, t^{n-1}), \qquad i=1, \cdots\cdots, n. \tag{21}$$

この右辺は変数 $t, t^1, \cdots\cdots, t^{n-1}$ に関して連続な偏導関数をもつ（定理 17 を見よ）．

ここで，もし変数

$$t,\ t^1, \cdots\cdots, t^{n-1} \tag{22}$$

を未知数と考えれば，系 (21) は $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ のとき，自明な解

$$t=t^1=\cdots\cdots=t^{n-1}=0$$

をもち，(21) の関数行列式は点 $t=t^1=\cdots\cdots=t^{n-1}=0$ において 0 にならない．これはベクトル (19) が 1 次独立であることからわかる．実際，$\boldsymbol{\varphi}(0, t^1, \cdots\cdots, t^{n-1})=\boldsymbol{\xi}(t^1, \cdots\cdots, t^{n-1})$ であるから

$$\frac{\partial}{\partial t^k}\boldsymbol{\varphi}(0, \cdots\cdots, 0)=\frac{\partial}{\partial t^k}\boldsymbol{\xi}(0, \cdots\cdots, 0) \quad \text{かつ} \quad \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\varphi}(0, \cdots\cdots, 0)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}).$$

したがって，系 (21) によって点 $\boldsymbol{a}$ のある近傍において座標 $x^1, \cdots\cdots, x^n$ のかわりにあたらしい座標 (22) を導入することができる．このあたらしい座標系によると方程式 (17) はきわめて簡単な形に書きあらわされ，E] で述べた初期値問題が容易に解ける．点 $\boldsymbol{a}$ の近傍で定義された任意の関数 $u(\boldsymbol{x})$ に対して，変数 $x^1, \cdots\cdots, x^n$ のかわりに，(21) によって定められる変数 (22) を代入すると，関数

$$v(t, t^1, \cdots\cdots, t^{n-1})=u(\varphi(t, t^1, \cdots\cdots, t^{n-1}))$$

がえられる．これより

$$\frac{\partial v(t, t^1, \cdots\cdots, t^{n-1})}{\partial t}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial x^i}f^i(\boldsymbol{x})$$

となる，ここに $\boldsymbol{x}=\varphi(t, t^1, \cdots\cdots, t^{n-1})$. したがって，変数 (22) を独立変数にとれば，方程式 (17) はつぎのようになる：

$$\frac{\partial v(t, t^1, \cdots\cdots, t^{n-1})}{\partial t}=F(\varphi(t, t^1, \cdots\cdots, t^{n-1}), v(t, t^1, \cdots\cdots, t^{n-1})). \tag{23}$$

座標系 (22) において曲面 (18) は方程式 $t=0$ で与えられるから，われわれの目標は，方程式 (23) の解で $t=0$ のとき与えられた関数 $u_0(t^1, \cdots\cdots, t^{n-1})$ に一致するようなものを求めることである．このような解を見つけるには，方程式 (23) を，t を独立変数，$t^1, \cdots\cdots, t^{n-1}$ をパラメータとする常微分方程式と考えて，

$$0,\ u_0(t^1, \cdots\cdots, t^{n-1})$$

を初期値とする解を求めればよい．このとき解 $v(t, t^1, \cdots\cdots, t^{n-1})$ は，定理 18 によって，すべての変数に関して連続な偏導関数をもつ．

これで **E**] の初期値問題が解けた．

注 意

$$\dot{x}^i=f^i(t, x^1, \cdots\cdots, x^n) \tag{24}$$

を非自律微分方程式系とする．非自律系に対して第 1 積分の概念を導入するため，補助的な未知関数

$$x^{n+1}=t$$

を導入する．このとき，方程式系 (24) に方程式

$$\dot{x}^{n+1}=1$$

をつけ加えてえられる方程式系は自律系になる．その系の第 1 積分を系 (24) の第 1 積分と考えることにする．

例

2 組の変数系をもつ関数

$$H=H(x^1, \cdots\cdots, x^n\ ;\ y^1, \cdots\cdots y^n)=H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \tag{25}$$

に対して，常微分方程式系：

$$\dot{x}^i=\frac{\partial}{\partial y^i}H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \quad \dot{y}^i=-\frac{\partial}{\partial x^i}H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \qquad i=1\cdots\cdots, n, \tag{26}$$

をハミルトン (Hamilton) 系といい，関数 $H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ をこの系のハミルトン関数という．関数 (25) は方程式系 (26) の第 1 積分であることがただちにたしかめられる．

第5章

安　定　性

機械的，電気的，その他の多種多様な装置のはたらきは常微分方程式系によって記述される．常微分方程式系はつねに無限に多くの解をもつが，その１つをきめるには初期値を指定する必要がある．ところが，実際に使われている装置はふつう一定の規則にしたがってはたらき，一見したところ，そのはたらきを記述する方程式系のさまざまな解に対応する多くのはたらきを見ることはできない．このことは，装置をそのままはたらかせ続けるとき初期値がなんらかのある一定の規則にしたがってとられていくか，それとも初期値が装置の継続的なはたらきによってその影響力を失い，装置それ自体がそのはたらきを定常解に安定させる，ということで説明される．この２番目の現象はすでに電気回路の考察の際に現われた．もう１つの例をあげよう．時計の振子を振らせる場合，はじめの振らせかたが弱ければ振子はいくらか振動したのち停止してしまう．しかし，はじめに十分強く振らせれば，その後短時間のうちに振子の振動は完全に一定し，振子はこの振幅をもってかぎりなく（実際には長時間にわたって）動き続ける．このように，時計のはたらきを記述する方程式系には２つの定常解すなわち静止の状態をあらわす平衡点と，時計の正常なはたらきをあらわす周期解とがある．その他のいかなる解も――もちろん無限に多くあるが――急速に上の２つの定常解の１つに近づいていき，ある時間が経過したのちには，事実上この定常解と異ならないものになる．上述の２つの定常解はいづれもある意味で**安定**なのである．この意味は，最初の瞬間に定常解からあまりズレていない非定常解はしだいに定常解に近づいていくということである．もちろん，これは解の安定性の正確な定義ではない．上の例から，時計のはたらきを記述する方程式系の相空間は２つの**引力圏**にわけられていることがわか

る．すなわち一方の圏内に初期値をもつ解は平衡点に近づいていき，他方の圏内に初期値をもつ解は周期解に近づいていくということである．

上に述べたことからわかるとおり，ある装置のはたらきを完全に解明するには，その装置のはたらきを記述する方程式系の相空間の状態を十分に把握することがのぞましい．この場合なによりも重要なことは，この方程式系のあらゆる安定解を知ることである．

初期値に関する解の連続性についての定理からわかるように（§23を見よ），一定の有限な時間区間において考える場合には，1つの初期値の十分近くに初期値をもつ解はこの時間区間全体ではじめの初期値に対応する解からわずかしかズレない．しかし，この性質は決して安定性を意味するものではない．安定であるというのは，初期値のズレが小さければ解のズレも無限に長い時間にわたって小さいということである．

この章では主として平衡点と周期解の安定性の問題を扱う．

さらにこの章は，工学の問題に対する2つの重要な応用例を含んでいる．それは，ワット[1]の制御装置をもつ蒸気機関のはたらきに関するヴィシニェグラツキー[2]の研究，および消滅しない電気振動をおこす真空管発振器のはたらきに関するアンドロノーフ[3]の研究であって，前者は自動制御論の先駆となり，後者は非線形振動論の基礎を築いたものである．

§30では2階自律方程式系の平衡点の近傍における軌道の状態を研究するが，この中には安定性の問題に関係のない部分もある．この§30は内容がむずかしいので本書の平均水準を多少越えており，最後の§31の内容はさらにむずかしくなる．

§26. リャプーノフ[4]の定理

ここではリャプーノフの安定性の概念と，自律系の平衡点（§15を見よ）が安定であるための十分条件とを与える．

訳注：1) Watt, 2) Вышнеградский, 3) Андронов, 4) Ляпунов

平衡点の安定性

正規形の自律方程式系

$$\dot{x}^i = f^i(x^1, \cdots\cdots, x^n), \qquad i=1, \cdots\cdots, n, \tag{1}$$

をベクトルの記法によって

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{2}$$

とあらわそう．関数

$$f^i(x^1, \cdots\cdots, x^n), \qquad i=1, \cdots\cdots, n, \tag{3}$$

とその1階導関数は $(x^1, \cdots\cdots x^n)$-空間のある開集合 Δ で定義されかつ連続であると仮定する．しかし，安定条件を証明する場合には f^i に関する仮定はさらに強められ，f^i は Δ において連続な2階偏導関数をもつと仮定される．

リャプーノフの意味での安定性の正確な定義を述べる前に，まず安定性の概念について説明しよう．方程式（2）の平衡点 $\boldsymbol{a}=(a^1, \cdots\cdots, a^n)$ が安定であるというのは，$t=0$ のときに $\boldsymbol{a}$ に十分近い点から出る方程式（2）のいかなる解も，その後（すなわち $t>0$ のとき）たえず点 $\boldsymbol{a}$ の近くにとどまることである．安定性の物理的な意味は明らかである．物理的対象（たとえば，なんらかの機械）のはたらきが方程式（2）によって記述されているとき，それが平衡状態 $\boldsymbol{a}$ におちつくことができるのは，この平衡状態が安定な場合だけである．なぜなら，そうでない場合には偶発的な衝撃による平衡状態からのごくわずかなズレが，そのはたらきを平衡状態からはるかにへだたらせるという結果をひきおこしてしまうからである．

以下，$t=0$，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}$ を初期値とする方程式（2）の解を $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\xi})$ であらわす．ゆえに $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\xi})$ は，スカラー変数 t とベクトル変数 $\boldsymbol{\xi}$ との関数であって，つぎの条件をみたす：

$$\boldsymbol{\varphi}(0, \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi}. \tag{4}$$

定義　方程式（2）の平衡点 $\boldsymbol{a}$ が**リャプーノフの意味で安定**であるというのは，つぎの2条件がみたされることである：1)　十分小さい正の数 ρ が存在して，$|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{a}|<\rho$ のとき方程式（2）の解 $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\xi})$ はすべての $t>0$ に対して存在する；2)　任意の正の数 ε に対して正の数 $\delta<\rho$ が存在して，$|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{a}|<\delta$

のとき $t>0$ において $|\varphi(t,\boldsymbol{\xi})-\boldsymbol{a}|<\varepsilon$ が成り立つ．リャプーノフの意味で安定な（方程式（2）の）平衡点 $\boldsymbol{a}$ が**漸近安定**であるというのは，3）十分小さい正の数 $\sigma<\rho$ が存在して，$|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{a}|<\sigma$ のとき

$$\lim_{t\to+\infty}|\varphi(t,\boldsymbol{\xi})-\boldsymbol{a}|=0$$

が成り立つことである．

まず，定係数の線形同次系に対して平衡点が安定であるための十分条件を与えよう．

A］定係数の線形同次方程式をベクトルの記法によって

$$\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x} \tag{5}$$

と書き，0, $\boldsymbol{\xi}$ を初期値とする（5）の解を $\boldsymbol{\psi}(t,\boldsymbol{\xi})$ であらわそう．もし行列 A の固有値がすべて負の実部をもてば，つぎの不等式が成り立つような正の定数 α，r が存在する：

$$|\boldsymbol{\psi}(t,\boldsymbol{\xi})|\leqq r|\boldsymbol{\xi}|e^{-\alpha t}\qquad (t\geqq 0 \text{ のとき}). \tag{6}$$

不等式（6）からただちにわかるように，方程式（5）の平衡点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ はリャプーノフの意味で安定であり，かつ漸近安定である．

不等式（6）を証明しよう．

$$A=(a^i_j),\qquad L(p)=(a^i_j-p\delta^i_j)$$

とおけば，微分記号 p（§7 を見よ）をもちいて方程式（5）をつぎのようなスカラー形式に書きあらわすことができる：

$$\sum_{j=1}^{n}L^i_j(p)x^j=0,\qquad i=1,\cdots\cdots,n. \tag{7}$$

行列 $L(p)$ の $(i,\ j)$-要素 $L^i_j(p)$ の余因数を $M^j_i(p)$ とすると，恒等式

$$\sum_{i=1}^{n}M^k_i(p)L^i_j(p)=\delta^k_jD(p)$$

が成り立つ．ここに $D(p)$ は行列 $L(p)$ の行列式である．関係式（7）に多項式 $M^k_i(p)$ をかけてから i に関して加え合わせれば，

$$0=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}M^k_i(p)L^i_j(p)x^j=\sum_{j=1}^{n}\delta^k_jD(p)x^j=D(p)x^k$$

がえられる．ゆえに，

$$\boldsymbol{x}=(x^1, \cdots\cdots, x^n)$$

が方程式（5）の1つの解であれば，各関数 x^i は微分方程式

$$D(p)x^i=0$$

をみたす．多項式 $D(p)$ の根は仮定によってすべて負の実部をもつから，関数 x^i は不等式

$$|x^i|\leqq Re^{-\alpha t} \qquad (i=1, \cdots\cdots, n; \ t\geqq 0)$$

をみたす．ここに R, α は番号 i に関係しない正の数である．この不等式から，不等式

$$|\boldsymbol{x}|\leqq\sqrt{n}\, Re^{-\alpha t} \qquad (t\geqq 0)$$

がみちびかれる．この不等式は前にもっと一般な仮定のもとで証明されたものである（§11 の B］を見よ）．

さて $\boldsymbol{e}_i$ を単位座標ベクトル，すなわち

$$\boldsymbol{e}_i=(0, \cdots\cdots, 1, \cdots\cdots, 0)$$

とする（1は最初から i 番目のところにある）．また，方程式（5）の解で 0, $\boldsymbol{e}_i$ を初期値とするものを $\boldsymbol{\psi}_i$ とする，すなわち

$$\boldsymbol{\psi}_i(0)=\boldsymbol{e}_i, \quad i=1, \cdots\cdots, n.$$

このとき，

$$0, \ \boldsymbol{\xi}=(\xi^1, \cdots\cdots, \xi^n)$$

を初期値とする方程式（5）の解 $\boldsymbol{\psi}(t, \boldsymbol{\xi})$ は明らかにつぎの形に書かれる：

$$\boldsymbol{\psi}(t, \boldsymbol{\xi})=\sum_{i=1}^{n}\xi^i\boldsymbol{\psi}_i(t). \tag{8}$$

解 $\boldsymbol{\psi}_i(t)$ のおのおのに対して，不等式

$$|\boldsymbol{\psi}_i(t)|\leqq\sqrt{n}\, Re^{-\alpha t} \quad (t\geqq 0)$$

が成り立つように R, α がとれるから，解 $\boldsymbol{\psi}(t, \boldsymbol{\xi})$ は明らかに不等式（6）をみたす．

平衡点 $\boldsymbol{x}=0$ がリャプーノフの意味で安定であることは不等式（6）からただちにわかる．実際，ε を与えられた正の数とすれば，δ として $\dfrac{\varepsilon}{r}$ をとればよい．$\boldsymbol{x}=0$ が漸近安定であることもやはり不等式（6）からわかる．

リャプーノフ関数

非線形系（1）の平衡点の安定条件を証明する際には，いわゆる**方程式系にもとづく微分**を利用する．この微分法はリャプーノフの定理の証明以外にも応用される．

B］　集合 Δ で定義された変数 $x^1, \cdots\cdots, x^n$ の任意の微分可能な関数

$$F(x^1, \cdots\cdots, x^n) = F(\boldsymbol{x})$$

を考える．$F(\boldsymbol{x})$ を点 $\boldsymbol{x} = (x^1, \cdots\cdots, x^n)$ において，方程式系（1）にもとづいて t で微分するということを，つぎのように定義する．$\varphi(t)$ を，$t = t_0$ のときに初期条件

$$\varphi(t_0) = \boldsymbol{x}$$

をみたす（2）の解とする．系（1）にもとづく関数 $F(\boldsymbol{x})$ の微分 $\dot{F}_{(1)}(\boldsymbol{x})$ を

$$\dot{F}_{(1)}(\boldsymbol{x}) = \frac{d}{dt} F(\boldsymbol{\varphi}(t))\Big|_{t=t_0}$$

と定義する．これは，合成関数の微分法の公式によって

$$\dot{F}_{(1)}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(\boldsymbol{x})}{\partial x^i} f^i(\boldsymbol{x}) \tag{9}$$

となる．（9）式からわかるように，微係数 $\dot{F}_{(1)}(\boldsymbol{x})$ は解 $\varphi(t)$ の取りかたによらず，点 $\boldsymbol{x}$ によって一意的にきまる．

ここで自律系の1つの性質を証明しよう．

C］　自律方程式系（2）の解で 0，$\boldsymbol{\xi}$ を初期値とするものを前のとおり $\varphi(t, \boldsymbol{\xi})$ であらわす．このとき関数 $\varphi(t, \boldsymbol{\xi})$ は恒等式

$$\varphi(t, \varphi(s, \boldsymbol{\xi})) = \varphi(s+t, \boldsymbol{\xi}) \tag{10}$$

をみたす．(10) を証明しよう．s を固定して

$$\eta = \varphi(s, \boldsymbol{\xi}) \tag{11}$$

とおき，方程式（2）の解

$$\varphi_1(t) = \varphi(t, \eta)$$

を考えよう．$\varphi(t, \boldsymbol{\xi})$ は自律方程式（2）の解であるから，

$$\varphi_2(t) = \varphi(t+s, \boldsymbol{\xi})$$

によって定義される関数 $\varphi_2(t)$ もまた（2）の解になる（§15 の **A**］を見よ）．

こうして，方程式（2）の2つの解 $\varphi_1(t)$，$\varphi_2(t)$ がえられ，かつ

$$\varphi_1(0)=\varphi(0, \eta)=\eta, \qquad \varphi_2(0)=\varphi(s, \xi)=\eta$$

となる（(4)，(11) を見よ）．このように，解 $\varphi_1(t)$ と $\varphi_2(t)$ とは同じ初期値をもつから，一致しなければならない．このことは，関係式 (10) が成り立つことにほかならない．

リャプーノフの定理の証明ではリャプーノフの関数とよばれる正の定符号2次形式が重要な役割をはたす．まず正の定符号2次形式の1つの性質を述べ（D］を見よ），つぎに**リャプーノフ関数**を構成することにしよう（E］を見よ）．

D］

$$\boldsymbol{x}=(x^1, \cdots\cdots, x^n) \tag{12}$$

を n 次元空間の変ベクトルとする．ベクトル $\boldsymbol{x}$ の**2次形式**とは，次式によって定義される $\boldsymbol{x}$ の関数 $W(\boldsymbol{x})$ のことである：

$$W(\boldsymbol{x})=\sum_{i,j=1}^{n} w_{ij}x^i x^j,$$

ただし係数 w_{ij} は実数で $w_{ij}=w_{ji}$ をみたす．2次形式 $W(\boldsymbol{x})$ が**正の定符号**であるというのは，$\boldsymbol{x}\neq 0$ のとき

$$W(\boldsymbol{x})>0$$

となることである．

任意の正の定符号2次形式 $W(\boldsymbol{x})$ に対して，適当に正の定数 μ, ν をえらべば，任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対してつぎの不等式が成り立つようにできる：

$$\mu|\boldsymbol{x}|^2 \leqq W(\boldsymbol{x}) \leqq \nu|\boldsymbol{x}|^2. \tag{13}$$

これより，任意のベクトル $\boldsymbol{x}$（(12) を見よ）に対して

$$|x^i| \leqq \sqrt{\frac{1}{\mu}W(\boldsymbol{x})} \tag{14}$$

正の数 μ, ν の存在を証明しよう．このため，ベクトル $\boldsymbol{\xi}$ が単位球面上をうごくとき，すなわち条件

$$|\boldsymbol{\xi}|=1 \tag{15}$$

をみたす場合に，関数 $W(\boldsymbol{\xi})$ の値について考えてみよう．球面 (15) は有界閉集合であり，関数 $W(\boldsymbol{\xi})$ は連続であるから，$W(\boldsymbol{x})$ は球面 (15) 上で必らずその最小値 μ および最大値 ν をとる．球面 (15) 上のベクトルはすべて $\boldsymbol{0}$ で

はないから，μ および ν は正の数である．$\boldsymbol{x}$ を任意のベクトルとすれば，球面 (15) に属するあるベクトル $\boldsymbol{\xi}$ によって $\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{\xi}$ と書きあらわせる．ところが，ベクトル $\boldsymbol{\xi}$ に対しては

$$\mu \leqq W(\boldsymbol{\xi}) \leqq \nu$$

となっている．この不等式に λ^2 をかければ，不等式 (13) がえられる．

つぎにリャプーノフの関数をつくろう．

E］ 定係数の線形同次方程式系

$$\dot{x}^i=\sum_{j=1}^{n} a_j^i x^j, \quad i=1, \cdots\cdots, n, \tag{16}$$

において行列 $A=(a_j^i)$ の固有値はすべて負の実部をもつと仮定する．このとき，正の定符号2次形式 $W(\boldsymbol{x})$ で系 (16) にもとづく導関数 $\dot{W}_{(16)}$ が不等式

$$\dot{W}_{(16)}(\boldsymbol{x}) \leqq -\beta W(\boldsymbol{x}) \tag{17}$$

をみたすようなものが存在する．ここに β は変ベクトル $\boldsymbol{x}$ に無関係な正の定数である．

2次形式 $W(\boldsymbol{x})$ をつくることにしよう．系 (16) はベクトル方程式（5）をスカラー形式に書きあらわしたものと考える．方程式（5）の解で初期値 0, $\boldsymbol{\xi}$ をもつものを，A］における同様，$\boldsymbol{\phi}(t, \boldsymbol{\xi})$ であらわせば，

$$\boldsymbol{\phi}(t, \boldsymbol{\xi})=\sum_{i=1}^{n} \xi^i \boldsymbol{\phi}_i(t) \tag{18}$$

となる（（8）を見よ）．いま

$$W(\boldsymbol{\xi})=\int_0^{\infty} |\boldsymbol{\phi}(\tau, \boldsymbol{\xi})|^2 d\tau \tag{19}$$

とおけば，(18) によって

$$W(\boldsymbol{\xi})^{*)}=\sum_{i,j=1}^{n} \xi^i \xi^j \int_0^{\infty} (\boldsymbol{\phi}_i(\tau), \boldsymbol{\phi}_j(\tau)) d\tau^{**)}. \tag{20}$$

関数 $\boldsymbol{\phi}_i(t)$ はいずれも不等式（6）をみたしているから，等式 (20) の右辺にある無限積分はいずれも収束し，$W(\boldsymbol{\xi})$ はベクトル $\boldsymbol{\xi}$ に関する2次形式になる．$\boldsymbol{\xi} \neq 0$ ならば (19) の積分記号内の式は正であるから $W(\boldsymbol{\xi})>0$ である．

訳注：*) この $W(\boldsymbol{\xi})$ がリャプーノフの関数である．
**) $(\boldsymbol{\phi}_i(\tau), \boldsymbol{\phi}_j(\tau))$ はベクトル $\boldsymbol{\phi}_i(\tau)$ と $\boldsymbol{\phi}_j(\tau)$ との内積をあらわす．

つぎに，系 (16) にもとづく関数 $W(\xi)$ の導関数 $\dot{W}_{(16)}(\xi)$ を計算しよう．このため B] にしたがって，任意の点 ξ をとおる解 $\phi(t,\xi)$ をとり，関数 $W(\phi(t,\xi))$ の $t=0$ における微係数を計算する．はじめに，C] によって

$$\phi(\tau,\ \phi(t,\xi))=\phi(\tau+t,\ \xi)$$

となることに注意しよう．これから，

$$W(\phi(t,\xi))=\int_0^\infty |\phi(\tau,\phi(t,\xi))|^2 d\tau$$

$$=\int_0^\infty |\phi(t+\tau,\xi)|^2 d\tau=\int_t^\infty |\phi(\tau,\xi)|^2 d\tau.$$

したがって，

$$\dot{W}_{(16)}(\xi)=\frac{d}{dt}W(\phi(t,\xi))\bigg|_{t=0}=\frac{d}{dt}\int_t^\infty |\phi(\tau,\xi)|^2 d\tau\bigg|_{t=0}$$

$$=-|\phi(t,\xi)|^2\bigg|_{t=0}=-|\xi|^2.$$

けっきょく，等式

$$\dot{W}_{(16)}(\xi)=-|\xi|^2$$

がえられる．ところが，不等式 (13) の後半から

$$-|\xi|^2\leqq -\frac{1}{\nu}W(\xi)$$

であるから，

$$\dot{W}_{(16)}(\xi)\leqq -\frac{1}{\nu}W(\xi)$$

となる．これで，不等式 (17) が証明された．

リャプーノフの定理

最後にリャプーノフの定理を述べ，かつそれを証明しよう．自律方程式系 (1) の平衡点を

$$\boldsymbol{a}=(a^1,\cdots\cdots,a^n)$$

とする．いま

$$x^i=a^i+\Delta x^i,\qquad i=1,2,\cdots\cdots,n, \tag{21}$$

とおき，

$$\Delta x^1,\cdots\cdots,\Delta x^n \tag{22}$$

をあたらしい未知関数と考える．系（1）に(21)を代入して，右辺を変数(22)に関してテイラー（Taylor）級数に展開すれば，

$$\Delta\dot{x}^i=f^i(\boldsymbol{a})+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f^i(\boldsymbol{a})}{\partial x^j}\Delta x^j+R^i,\quad i=1,\cdots\cdots,n, \tag{23}$$

がえられる．最後の項 R^i は未知関数（22）に関して2次の無限小となる．$\boldsymbol{a}$ は系（1）の平衡点であるから，

$$f^i(\boldsymbol{a})=0.$$

ゆえに，

$$a_j^i=\frac{\partial f^i(\boldsymbol{a})}{\partial x^j} \tag{24}$$

とおけば，系（23）はつぎの形に書くことができる：

$$\Delta\dot{x}^i=\sum_{j=1}^{n}a_j^i\Delta x^j+R^i,\quad i=1,\cdots\cdots,n. \tag{25}$$

定理 19. 『行列 $A=(a_j^i)$（(24) を見よ）のすべての固有値が負の実部をもつならば，系（1）の平衡点 $\boldsymbol{a}$ は漸近安定である．すなわち，十分小さい正の数 σ が存在して，$|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{a}|<\sigma$ のとき，不等式

$$|\varphi(t,\boldsymbol{\xi})-\boldsymbol{a}|\leqq r|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{a}|e^{-\alpha t} \tag{23}$$

が成り立つ．ここに r, α は $\boldsymbol{\xi}$ に無関係な正の定数である』

証明 系（1）の平衡点 $\boldsymbol{a}$ は原点に一致していると考えよう．このように考えてもさしつかえないのは，行列 A が座標系の平行移動によって変わらないからである．$\boldsymbol{a}=0$ と考えれば

$$\Delta x^i=x^i$$

となり，系（25）はつぎの形に書ける：

$$\dot{x}^i=\sum_{j=1}^{n}a_j^i x^j+R^i,\quad i=1,\cdots\cdots,n, \tag{27}$$

ここに

$$R^i=\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2 f^i(\theta\boldsymbol{x})}{\partial x^j\partial x^k}x^j x^k.$$

いま系（27）を線形化（すなわち剰余項 R^i を捨てさること）してえられる線形系

$$\dot{x}^i=\sum_{j=1}^{n} a^i_j x^j, \qquad i=1, \cdots\cdots, n, \tag{28}$$

に対するリャプーノフ関数を $W(\boldsymbol{x})$ とする（［E］を見よ）．系 (27) にもとづく関数 $W(\boldsymbol{x})$ の導関数 $\dot{W}_{(27)}(\boldsymbol{x})$ を計算しよう：

$$\dot{W}_{(27)}(\boldsymbol{x})=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial W(\boldsymbol{x})}{\partial x^i}a^i_j x^j+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial W(\boldsymbol{x})}{\partial x^i}R^i$$

$$=\dot{W}_{(28)}(\boldsymbol{x})+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial W(\boldsymbol{x})}{\partial x^i}R^i.$$

関数 $W(\boldsymbol{x})$ は条件 (17) をみたしているから，

$$\dot{W}_{(27)}(\boldsymbol{x})\leqq-\beta W(\boldsymbol{x})+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial W(\boldsymbol{x})}{\partial x^i}R^i$$

となる．いま十分に小さい正の数 b をえらんで，

$$W(\boldsymbol{x})\leqq b \tag{29}$$

ならばベクトル $\boldsymbol{x}$ は集合 Δ に属するようにする（(13) によってこのような数 b は存在する）． 2階導関数 $\dfrac{\partial^2 f^i(\theta\boldsymbol{x})}{\partial x^j\partial x^k}$ は連続であるから，楕円体 (29) において有界である．ゆえにこの楕円体において，不等式

$$|R^i|\leqq k|\boldsymbol{x}|^2\leqq\frac{k}{\mu}W(\boldsymbol{x})$$

が成り立つ．ここに k は定数である．また，$\dfrac{\partial W(\boldsymbol{x})}{\partial x^i}$ は $x^1, \cdots\cdots, x^n$ に関する1次式であるから，ある定数 l が存在して

$$\left|\frac{\partial W(\boldsymbol{x})}{\partial x^i}\right|\leqq l\sqrt{W(\boldsymbol{x})}$$

となる（(14) を見よ）．したがって，正の数 q が存在して，$W(\boldsymbol{x})\leqq b$ のとき

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial W(\boldsymbol{x})}{\partial x^i}R^i\leqq qW(\boldsymbol{x})^{\frac{3}{2}}$$

が成り立つ．いま

$$c\leqq b, \qquad q\sqrt{c}\leqq\frac{\beta}{2}$$

となるような正の数 c をとろう．このとき，

$$W(\boldsymbol{x})\leqq c \tag{30}$$

であれば，つねに

$$\dot{W}_{(27)}(\boldsymbol{x}) \leqq -\frac{\beta}{2} W(\boldsymbol{x})$$

が成り立つ．$\alpha=\dfrac{\beta}{4}$ とおけば，不等式 (30) をみたす $\boldsymbol{x}$ に対して

$$\dot{W}_{(27)}(\boldsymbol{x}) \leqq -2\alpha W(\boldsymbol{x})$$

となる．

$\boldsymbol{\xi}$ を楕円体 (30) の内点としよう．すなわち $\boldsymbol{\xi}$ は不等式

$$W(\boldsymbol{\xi}) < c \tag{31}$$

をみたしているものとする．系 (27) の解で初期値が $0, \boldsymbol{\xi}$ のものを，前と同様に $\varphi(t, \boldsymbol{\xi})$ であらわし，

$$w(t) = W(\varphi(t, \boldsymbol{\xi}))$$

とおく．関数 $w(t)$ は解 $\varphi(t, \boldsymbol{\xi})$ の存在区間に属するすべての $t \geqq 0$ に対して定義され，かつ

$$w(t) \leqq c \tag{32}$$

であるかぎり，条件

$$\dot{w}(t) \leqq -2\alpha w(t) \tag{33}$$

をみたす(**B**]を見よ)．もし解 $\varphi(t, \boldsymbol{\xi})$ がすべての $t \geqq 0$ に対して定義されているのでなければ，(§22 の **B**] によって) t が増大するとき点 $\boldsymbol{x}=\varphi(t, \boldsymbol{\xi})$ は必らず楕円体 (30) の外に出てしまう筈である．さて，点 $\boldsymbol{x}=\varphi(t, \boldsymbol{\xi})$ がこの楕円体の外へ出ると仮定し，この点がはじめて (30) の境界に達するときの t の値を $t'>0$ とすると，$0 \leqq t \leqq t'$ のときには点 $\varphi(t, \boldsymbol{\xi})$ は楕円体 (30)に属するから不等式 (33) が成り立つ．したがって，$\dot{w}(t)$ は正ではない．ゆえに $c=w(t') \leqq w(0) < c$，これは矛盾である．

けっきょく，解 $\varphi(t, \boldsymbol{\xi})$ したがって関数 $w(t)$ はすべての $t>0$ に対して定義され，かつ不等式 (33) をみたすことがわかった．$\boldsymbol{\xi} \neq 0$ であれば $w(t) > 0$ であるから，不等式 (33) からつぎのような計算ができる：

$$\frac{\dot{w}(t)}{w(t)} \leqq -2\alpha\,; \quad t \geqq 0 \text{ のとき } \int_0^t \frac{\dot{w}(\tau)}{w(\tau)} d\tau \leqq -2\alpha t\,;$$

$$\log w(t) - \log w(0) \leqq -2\alpha t.$$

最後の不等式から

$$W(\varphi(t,\boldsymbol{\xi}))\leqq W(\boldsymbol{\xi})e^{-2\alpha t}.$$

これより，不等式 (13) によって

$$|\varphi(t,\boldsymbol{\xi})|^2\leqq\frac{\nu}{\mu}|\boldsymbol{\xi}|^2e^{-2\alpha t}\quad(t\geqq 0) \tag{34}$$

がえられる．この関係は $\boldsymbol{\xi}$ が不等式 (31) をみたすかぎりつねに成り立つ．

$$|\boldsymbol{\xi}|<\sigma=\sqrt{\frac{c}{\nu}} \tag{35}$$

ならば，不等式 (13) の第2の不等式によって不等式 (31) がえられるから，けっきょく，不等式 (35) がみたされていれば，不等式 (34) が成り立つ．その平方根をとれば，不等式

$$|\varphi(t,\boldsymbol{\xi})|\leqq\sqrt{\frac{\nu}{\mu}}|\boldsymbol{\xi}|e^{-\alpha t}\quad(t\geqq 0)$$

がえられるが，これは不等式 (26) で $r=\sqrt{\dfrac{\nu}{\mu}}$，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ とした場合にほかならない．これで定理 19 が証明された．

F］ つぎのような場合に，方程式（2）の平衡点 $\boldsymbol{a}$ は完全不安定であるということにしよう：正の数 σ が存在して，開球 $|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{a}|<\sigma$ の点 $\boldsymbol{\xi}\neq\boldsymbol{a}$ を始点とする方程式（2）の解 $\varphi(t,\boldsymbol{\xi})$ は必らずこの球の外に出て，ふたたびこの球の中にもどることはない．すなわち正の数 $T=T(\boldsymbol{\xi})$ が存在して，$t=T$ のとき解 $\varphi(t,\boldsymbol{\xi})$ が定義され，かつこの解の定義域に属するすべての $t>T$ に対して不等式 $|\varphi(t,\boldsymbol{\xi})-\boldsymbol{a}|\geqq\sigma$ が成り立つ．

もし行列 $\left(\dfrac{\partial f^i(\boldsymbol{a})}{\partial x^j}\right)$ の固有値がすべて正の実部をもてば，方程式（2）の平衡点 $\boldsymbol{a}$ は完全不安定である．

この命題を証明するには，定理 19 の証明の途中で述べたいくつかの事実を利用する．そのため，方程式（2）（これに対しては行列 $\left(\dfrac{\partial f^i(\boldsymbol{a})}{\partial x^j}\right)$ の固有値はすべて正の実部をもつと仮定している）とともに，方程式

$$\dot{\boldsymbol{x}}=-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{36}$$

を考えよう．前と同様に $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ と考えれば，方程式 (36) に対して点 $\boldsymbol{0}$ は明らかに定理 19 の条件をみたしている．定理 19 の証明の中で述べたように，条件 (30) のもとでつぎの不等式をみたすリャプーノフ関数 $W(\boldsymbol{x})$ が存在

する：

$$\dot{W}_{(36)}(\boldsymbol{x}) \leqq -2\alpha W(\boldsymbol{x}).$$

この不等式の左辺を具体的に書きあらわせば（(9)を見よ）

$$\dot{W}_{(36)}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W(\boldsymbol{x})}{\partial x^i}(-f^i(\boldsymbol{x})) \leqq -2\alpha W(\boldsymbol{x}),$$

すなわち

$$\dot{W}_{(1)}(\boldsymbol{x}) \geqq 2\alpha W(\boldsymbol{x})$$

となる．この不等式はもちろん，不等式 (30) がみたされているときに成り立つ．いま $\boldsymbol{\xi}$ を楕円体 (30) の任意の内点としよう（(31) を見よ）．

$$w(t) = W(\varphi(t, \boldsymbol{\xi}))$$

とおけば，

$$w(t) \leqq c$$

であるかぎり，不等式

$$\dot{w}(t) \geqq 2\alpha w(t) \tag{37}$$

が成り立つ．$\boldsymbol{\xi} \neq 0$ であるから $w(t) > 0$．ゆえに不等式 (37) からつぎの計算ができる：

$$\frac{\dot{w}(t)}{w(t)} \geqq 2\alpha\text{；}\quad t \geqq 0 \text{ のとき } \int_0^t \frac{\dot{w}(\tau)}{w(\tau)} d\tau \geqq 2\alpha t\text{；}$$

$$w(t) \geqq w(0)e^{2\alpha t}\text{；}\quad W(\varphi(t, \boldsymbol{\xi})) \geqq W(\boldsymbol{\xi})e^{2\alpha t}.$$

最後の不等式から，t が増大するとき点 $\boldsymbol{x} = \varphi(t, \boldsymbol{\xi})$ は必らず楕円体 (30) の境界に達し，したがって楕円体の内部からぬけ出る．その後この点 $\boldsymbol{x} = \varphi(t, \boldsymbol{\xi})$ はもはや楕円体 (30) の内部にはもどらないことをしめそう．そうでなかったとすると，$w(t') = c$ となる正の数 t' が見つかって，十分に小さいすべての正の数 Δt に対しては不等式 $w(t' + \Delta t) < c$ が成り立つはずである．この2つの関係から $\dot{w}(t') \leqq 0$ となる．ところがこれは不等式 (37) に矛盾する．なぜなら，$w(t') = c$ であるから $t = t'$ のときにも (37) は成り立つからである．

これで $\boldsymbol{\xi} \neq 0$ が楕円体 (30) の内部にあれば，軌道 $\boldsymbol{x} = \varphi(t, \boldsymbol{\xi})$ は必らず楕円体 (30) の外に出てふたたびそこにもどらないことが証明された．不等式 (13) の第2の不等式によって，不等式 (35) から不等式 (31) がみちびかれ，

開球 (35) は楕円体 (30) に含まれることがわかる．このことと上の証明とから，命題 F] がえられる．

例

A] への補足として，行列 A の1つの固有値 λ が正の実部をもてば，方程式（5）の平衡点 $x=0$ はもはやリャプーノフの意味で安定ではないことをしめそう．実際，§14 の A] によって，方程式（5）の1つの解はベクトル関数 $x=che^{\lambda t}$ である．ここに c は任意の実定数，h は行列 A の固有値 λ に対応する固有ベクトルである．もし λ が実数であれば，十分に小さい c に対して，上の解は平衡点 $x=0$ にいくらでも近い点 ch を始点とするが，時間がたつにつれてその絶対値はいくらでも大きくなる．またもし λ が複素数であれば，方程式（5）の解 $c(he^{\lambda t}+\bar{h}e^{\bar{\lambda}t})$ が同様な性質をもつ．

§ 27. 遠心制御装置（ヴィシニェグラツキー*) の研究）

現今の工業技術では自動運転機構が非常に多く使われているので，自動制御の理論のはたす役割はきわめて大きい．自動制御装置の設計者の当面する最も重要な問題の1つは，制御機械系のはたらきの安定性の問題である．この問題は多くの場合，リャプーノフの定理（§26 を見よ）によって解決される．

最も古くから使われた自動制御装置は蒸気機関に対するワット (Watt) の遠心制御装置である．遠心制御装置は 18 世紀のおわり頃と 19 世紀の前半においてはきわめて良くその役割をはたしたのであるが，19 世紀の中頃に構造に変更を加えたところ，そのはたらきが期待どおりにいかなくなってしまった．多くの学者や技術者たちがこの困難な問題の解決法をさがし求め，ついにこの問題は自動制御論の先駆者であるロシヤのすぐれた技術者ヴィシニェグラツキーによって，完全に明快かつ簡潔に解決された．ヴィシニェグラツキーの研究《正しくはたらく制御装置について》(1876 年) を発端にして，工業技術の実際問題に応じた機械の制御理論がはじまった．この § では，簡単化した形でヴィシニェグラツキーの研究を述べる．

遠心制御装置（図 41）は，垂直な回転軸 S とその上端で固定されたジョイ

*) Вышнеградский

ントに連結された同じ長さの2本の腕木 L_1, L_2 とからなり，L_1 と L_2 との先端には同じ質量の球がついている．さらに腕木 L_1, L_2 はもう1つのジョイントに連結されていて，まっすぐに下にたれた状態から軸 S を含む一定の平面内で同時に同じ角だけ開くようにできている．腕木 L_1 と L_2 とがまっすぐに下にたれた状態から角 φ だけ開いた場合，それらはジョイントのたすけによって，軸 S にはめてある特殊のすべり環 M を動かす．このすべり環 M と軸 S の上端との距離は $\cos\varphi$ に比例する．腕木 L_1, L_2 の長さを1にして，それらの先端にとりつけられた球の質量をいずれも m としよう．軸 S が角速度 θ で回転するとき，腕木 L_1, L_2 がまっすぐに下にたれた状態から角 φ だけ開いたとすれば，おのおのの球に対して

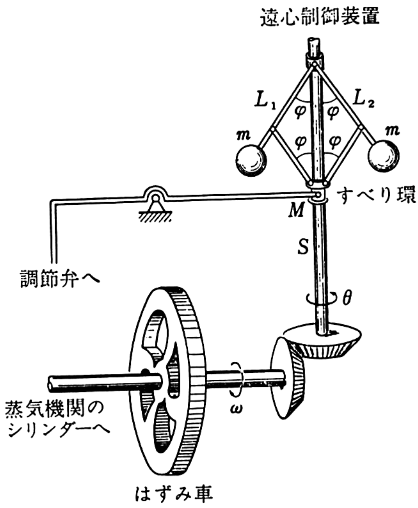


図 41

$$m\theta^2 \sin\varphi \tag{1}$$

の遠心力がはたらく．また，いずれの球にも

$$mg \tag{2}$$

に等しい重力がはたらいている．球にはたらく腕木 L_i と同方向の力は，球に対する腕木 L_i の反作用とつり合うから，球にはたらく2つの力（1），（2）を腕木の方向と，腕木に直交する方向（角 φ が増加する方向を正とする）とに分解してみよう．ただちにわかるように（図 42），力（1）の腕木に垂直な（正の）方向の成分は

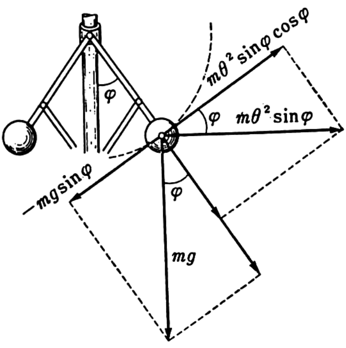


図 42

$$m\theta^2 \sin\varphi \cos\varphi \tag{3}$$

であり，同じ方向の重力（2）の成分は

$$-mg\sin\varphi \tag{4}$$

に等しい．したがって2つの力（3）と（4）との合力は

$$m\theta^2 \sin\varphi \cos\varphi - mg\sin\varphi \tag{5}$$

によって与えられる．

遠心制御装置のはたらきを簡潔に説明すれば，つぎのように要約できる．軸 S が角速度 θ で回転していれば，腕木 L_1, L_2 は力（1），（2）の作用をうけて，つぎの式

$$m\theta^2 \sin\varphi \cos\varphi - mg\sin\varphi = 0 \tag{6}$$

によって定められる角 φ だけ開く．関係式（6）より，角 φ は角速度 θ の1価単調増加関数として定義される．この意味において，ワットの制御装置は回転速度の測定器と考えられる．以上は制御装置のいわゆる静力学的な考察である．しかし実際には，動力学的な現象がおこる．質量 m の球は力（5）の作用を受けて運動をおこない．その運動は微分方程式によって記述される．球 m が運動する際，力（5）のほかにジョイントの連結部における摩擦力が球 m にはたらく．この力は，そのときの球の運動の状態によってきわめて複雑な影響を受ける．しかしここでは，その複雑な関係を根本的に単純化して，摩擦力は球 m の角変位の速さ $\dot{\varphi}$ に比例し，かつこの速さと反対の符号をもつと仮定しよう．すなわち摩擦力は

$$-b\dot{\varphi} \quad (b\text{ は正の定数})$$

で与えられる．したがって，球 m の位置をきめる座標として φ を採用すれば，φ に対してつぎの微分方程式がえられる：

$$m\ddot{\varphi} = m\theta^2 \sin\varphi \cos\varphi - mg\sin\varphi - b\dot{\varphi}. \tag{7}$$

(力（5）を計算したときには，θ および φ が一定であると仮定していた．θ と φ とが変化する場合にはさらに上述以外の力が加わる．しかし，それらは同一平面内を動く腕木とジョイントとの反作用でつり合うから，方程式（7）はやはり正しいのである).

蒸気機関は慣性モーメント J のハズミ車をもち，これは蒸気の力によって回転運動をおこなって有効な仕事，たとえば，たて坑から鉱山用リフトを引き上げるような仕事をする．さて，蒸気機関の微分方程式はつぎの形に書きあらわされる：

$$J\dot{\omega}=P_1-P, \tag{8}$$

ここに ω はハズミ車の回転の角速度，P_1 は蒸気の力のモーメント，P はハズミ車にはたらくリフトの力のモーメントである．P_1 は蒸気機関のシリンダーに蒸気を供給する調節弁の開閉の度合に関係し，P は昇降機の積荷に関係する．

遠心制御装置が蒸気機関に取りつけられるのは，機関の運転を一様にたもつためである．制御装置はハズミ車の回転速度を《測定》し，もしそれがあまりに速いようであれば，蒸気の供給を少なくし，また，あまりに遅いようならば，蒸気の供給を多くするのである．この目的のため，蒸気機関のハズミ車は歯車装置によって制御装置の垂直軸に連絡される（図 41）．ゆえに角速度 ω と θ との間には一定の関係：

$$\theta=n\omega \tag{9}$$

がある．n はいわゆる伝達係数である．このように蒸気機関は制御装置にはたらきかけ，ハズミ車の回転速度の測定がおこなわれる．一方，制御装置のすべり環 M は蒸気を供給する調節弁に連絡されていて，関係式

$$P_1=F_1+k(\cos\varphi-\cos\varphi^*) \tag{10}$$

が成り立つ．ここに φ^* は φ のとるべき《基準の》値であって，φ はその近くに維持されていなければならない．また F_1 は $\varphi=\varphi^*$ のときに蒸気の力 P_1 のとる値，$k>0$ は比例定数である．

(10) からわかるように，逆に，制御装置から蒸気機関へのはたらきかけは，角 φ が φ^* を越える場合には蒸気の供給（と同時に蒸気の力 P_1）をへらすように，また φ が φ^* 以下ならば蒸気の供給を増すようにおこなわれる．このような機関と制御装置との相互作用の結果，後者はハズミ車の回転速度が減少したときには蒸気の供給を増加させ，また回転速度が増加したときには蒸気の供

給を減少させる．これによって，当然ハズミ車の回転は安定することが期待される．このような制御装置が 19 世紀の中頃までの蒸気機関ではうまくはたらいていたのである．19 世紀の後半から制御装置のはたらきの不調が現われはじめ，その原因を解明するには制御系の動力学的なはたらきを正確に研究し，かつその安定性をくわしくしらべなければならなかった．これをはじめてなしとげたのがヴィシニェグラツキーである．

関係式（7)～(10）からわかるように，制御系はつぎの2つの微分方程式によって記述される：

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{\varphi} &= mn^2\omega^2\sin\varphi\cos\varphi - mg\sin\varphi - b\dot{\varphi}, \\ J\dot{\omega} &= k\cos\varphi - F, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

ここに $F=P-F_1+k\cos\varphi^*$ は荷重に関係する値である．この2つの方程式のうちの前者は2階の微分方程式である．この方程式系を正規形にするため，あたらしい変数 ψ を

$$\psi=\dot{\varphi}$$

によって導入すれば，系（11）はつぎのような正規形になる：

$$\left.\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \psi, \\ \dot{\psi} &= n^2\omega^2\sin\varphi\cos\varphi - g\sin\varphi - \frac{b}{m}\psi, \\ \dot{\omega} &= \frac{k}{J}\cos\varphi - \frac{F}{J}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

蒸気機関の正常なはたらきとは，荷重 P が変化しないときそのハズミ車の回転の角速度 ω が一定にたもたれるということ，すなわち，一定値 F のもとで蒸気を供給する調節弁が不変であることにほかならない．これはまた角 φ が不変であることを意味する．そこでまず

$$\varphi=\varphi_0, \quad \psi=0, \quad \omega=\omega_0$$

の形をした系（12）の解すなわち（12）の平衡点を求めよう．われわれの目標はこの平衡点の安定性をしらべることである．

(12）の右辺を0に等置してえられる方程式を解けば，平衡点の座標：

$$\left.\begin{aligned}&\psi_0=0,\\&\cos\varphi_0=\frac{F}{k},\\&n^2\omega_0^2=\frac{g}{\cos\varphi_0}\end{aligned}\right\}\qquad(13)$$

が求まる．いま

$$\varphi=\varphi_0+\Delta\varphi,\quad \psi=\psi_0+\Delta\psi,\quad \omega=\omega_0+\Delta\omega$$

とおこう．このような変換と方程式（12）の線形化とによって，つぎのような方程式系がえられる：

$$\begin{aligned}&\Delta\dot{\varphi}=\Delta\psi,\\&\Delta\dot{\psi}=n^2\omega_0^2\cos 2\varphi_0\,\Delta\varphi+n^2\omega_0\sin 2\varphi_0\,\Delta\omega-g\cos\varphi_0\Delta\varphi-\frac{b}{m}\Delta\psi,\\&\Delta\dot{\omega}=-\frac{k}{J}\sin\varphi_0\Delta\varphi.\end{aligned}$$

この系の 2 番目の方程式に（13）の第 3 式を代入すれば，簡単な計算により

$$\Delta\dot{\psi}=-\frac{g\sin^2\varphi_0}{\cos\varphi_0}\Delta\varphi-\frac{b}{m}\Delta\psi+\frac{2g\sin\varphi_0}{\omega_0}\Delta\omega$$

となる．$\Delta\varphi$, $\Delta\psi$, $\Delta\omega$ に関する線形方程式系の特性多項式は次式に等しい：

$$D(p)=\begin{vmatrix}-p & 1 & 0\\ -\dfrac{g\sin^2\varphi_0}{\cos\varphi_0} & -\dfrac{b}{m}-p & \dfrac{2g\sin\varphi_0}{\omega_0}\\ -\dfrac{k}{J}\sin\varphi_0 & 0 & -p\end{vmatrix}.$$

この行列式を計算して -1 をかければ，

$$-D(p)=p^3+\frac{b}{m}p^2+\frac{g\sin^2\varphi_0}{\cos\varphi_0}p+\frac{2kg\sin^2\varphi_0}{J\omega_0}.$$

この多項式の係数はすべて正であるから，これが安定であるための必要十分条件は（定理 6 によって），つぎの不等式が成り立つことである：

$$\frac{b}{m}\cdot\frac{g\sin^2\varphi_0}{\cos\varphi_0}>1\cdot\frac{2kg\sin^2\varphi_0}{J\omega_0},$$

または，（13）によって

$$\frac{bJ}{m}>\frac{2k\cos\varphi_0}{\omega_0}=\frac{2F}{\omega_0}. \tag{14}$$

リャプーノフの定理（定理 19）によって，不等式 (14) は制御系が安定であるための十分条件である．

不等式（14）の右辺の意味を明らかにするため，蒸気機関の**運転速度の非一様度**という概念を導入しよう．この概念は工学において重要な役割をはたしている．（13）からわかるように，値 $F=P-F_1+k\cos\varphi^*$ が変化すれば（すなわち荷重 P が変化すれば）安定速度 ω_0 が変化する．値 $\dfrac{d\omega_0}{dP}$ は，荷重 P が変化する場合，ω_0 の変化の速さを特徴づけるものである．その絶対値 $\nu=\left|\dfrac{d\omega_0}{dP}\right|$ を（下で見られるように導関数 $\dfrac{d\omega_0}{dP}$ は負である）蒸気機関の**運転速度の非一様度**とよぶ．（13）によって，

$$F\omega_0{}^2=一定$$

であり，これを微分して

$$\frac{d\omega_0}{dF}=-\frac{\omega_0}{2F}$$

がえられる．したがって

$$\nu=\frac{\omega_0}{2F}$$

であって，安定条件（14）は最終的につぎの形に書きかえられる：

$$\frac{bJ}{m}\cdot\nu>1. \tag{15}$$

ヴィシニェグラツキーは公式（15）からつぎの結果をえたのである：

1.　球の質量 m を大きくすることは安定性に悪影響を与える．

2.　摩擦係数 b を小さくすることは安定性に悪影響を与える．

3.　ハズミ車の慣性モーメント J を小さくすることは安定性に悪影響を与える．

4.　運転速度の非一様度 ν を小さくすることは安定性に悪影響を与える．

ヴィシニェグラツキーは，彼の得た結論を技術者にも容易に理解できるように，かつその最も重要なことがらに彼等の注意を向けるため，その研究の最後の部分でつぎのような有名なテーゼを述べている．

第1のテーゼ：調節弁（摩擦係数）は正確敏感にはたらく制御装置の最も肝要な部分である．簡単にいえば《調節弁なくして制御装置はありえない》.

第2のテーゼ：不安定な制御装置（すなわち非一様度が0であるような制御装置）は，たとえ調節弁があったとしてももちいるべきではない．簡単にいえば《非一様度なくして制御装置はありえない》.

19世紀の中頃から現われた制御装置の不調の原因は，産業技術の発達にともなって，不等式（15）における4つの値がすべて安定性を悪化させる方向に取られるようになったためであると説明される．すなわち，機械の出力の増加にともない調節弁の重さが増大したためにますます重い球が使われるようになったこと．機械の部品の表面処理の良さが摩擦係数の減少をまねいたこと．機械の運転速度を大きくするためにハズミ車の慣性モーメントを小さくする必要があったこと．最後に運転速度に対する荷重の影響を小さくするこころみが運転速度の非一様度を小さくすることに向けられたこと．

上で指摘した各種の要因による悪影響を解明した上で，ヴィシニェグラツキーは彼のテーゼにおいて，摩擦係数を(特別な構造の調節弁によって)人工的に大きくすることと，運転の非一様度を(機械の構造に関係する数 n, k を利用して）大きくすることをすすめている．

§28. 極 限 閉 軌 道

この§では，フランスの数学者ポアンカレー(Poincaré)によって導入された極限閉軌道(limit cycle)の定義を与え，これについて若干の考察をおこなう．また極限閉軌道が存在するための1つの判定条件を与える．現在では極限閉軌道の概念は常微分方程式の理論自体においても，また工学への応用においても最も重要な役割をはたしている．

正規形の自律方程式系

$$\dot{x}^i = f^i(x^1, \cdots\cdots, x^n), \quad i=1, \cdots\cdots, n, \tag{1}$$

を考えよう．この右辺は変数 $x^1, \cdots\cdots, x^n$ の相空間 R のある開集合 Δ において定義され，かつ連続な偏導関数 $\dfrac{\partial f^i}{\partial x^j}$ をもつと仮定する．この系をベクトルの

記法によって

$$\dot{x}=f(x) \qquad (2)$$

と書こう．この§の最も本質的な議論はすべて $n=2$ の場合に関するものである．2次元の場合を強調するために，系（1）の相平面 P を考え，相空間 R とはよばないことにする．相平面を考察する場合には，直観的にわかりやすい幾何学的な方法が本質的な役割をはたしてくれる．簡単のため，開集合Δが相平面 P 全体である場合を考えることにする（一般にはそうではないが）．

極限閉軌道とその近傍における軌道の状態

方程式（2）($n=2$) の**極限閉軌道**とは，この方程式の孤立した周期解のことである．より正確な定義を述べよう．$x=\varphi(t)$ を方程式（2）の周期解とし，この解が平面 P においてえがく閉曲線を K とする．解 $x=\varphi(t)$（および軌道 K）が孤立した周期解すなわち**極限閉軌道**であるというのは，曲線 K からの距離が ρ より小でかつ K 上にないどんな点 ξ に対しても，ξ をとおる方程式（2）の解は周期解にならないように正の数 ρ がとれることである．

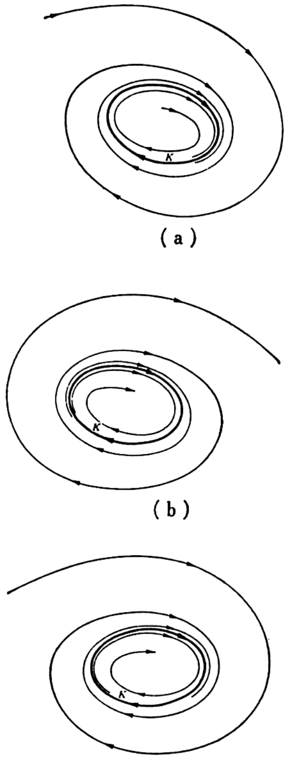
これは幾何学的には，方程式（2）が（その相平面 P において）閉軌道 K の近くには K のほかにいかなる閉軌道をももたないことを意味する．方程式（2）の軌道が極限閉軌道 K の近傍でどのような行動をするかという問題は，つぎの定理によって解決される．

定理 20. 『$x=\varphi(t)$ を方程式（2）($n=2$) の極限閉軌道とし，この解によってえがかれる平面 P 上の閉軌道を K とする．周知のとおり，閉曲線は平面を2つの領域——内部と外部——とに分割する．ところが，方程式（2）の互いに異なる軌道は決して交わらないから，K と異なる軌道はすべて軌道 K に関してその内部にあるか，または外部にある．このとき K の近傍において，外部および内部にあるどの軌道に対しても，つぎの互いに排反する2つの場合がおこる．すなわち，K の近傍に始点をもつ軌道は

1) $t\to+\infty$ のとき K にラ線状にまきつく（図 43,（a)），
2) $t\to-\infty$ のとき K にラ線状にまきつく（図 43,（b)）』

K の近傍に始点をもつ軌道がすべて（K の内部にあるものも，外部にあるも

のも）$t \to +\infty$ のときに K にまきついていくならば，極限閉軌道 K は**安定**であるという（図 43,(a)）．K の近傍に始点をもつ軌道がすべて $t \to -\infty$ のときに K にまきついていくならば，極限閉軌道 K は**完全不安定**であるという（図 43,(b)）．K の内部にある軌道は $t \to -\infty$ のとき K にまきつき，外部にある軌道は $t \to +\infty$ のときに K にまきついていく場合，およびこの逆の場合には，極限閉軌道 K は**半安定**であるという（図 43,(c)）．



(a) (b) (c)

図 43

定理 20 の証明にも，また軌道が極限閉軌道に《まきつく》ということをもっと正確に表現するのにも，後続関数という概念をもちいる．この関数は幾何学的に明らかな意味をもっているので，その性質をことこまかに証明することなく，比較的手短かに言いあらわすことができる．つぎにそれを述べよう．

K を，周期 τ の周期解に対応する相平面 P 上の閉曲線とする．また，L は，曲線 K とただ1点 $\boldsymbol{a}$ において K と接することなく交わり，かつ $\boldsymbol{a}$ をその内点とする線分だとしよう．線分 L 上に（正確に言うならば，L を含む直線上に），ふつうの仕方で座標を導入する．点 $\boldsymbol{a}$ の座標を u_0 であらわそう．座標が u であるような線分 L 上の点 $\boldsymbol{p}$ をとおる方程式（2）の軌道を考え，時刻 t を増加させながらこの軌道の上を動くことにしよう．幾何学的に明らかなように，もしも点 $\boldsymbol{p}$ が点 $\boldsymbol{a}$ に近ければ，われわれは曲線 K の近くを動くことになり，したがって，つぎつぎに線分 L と出会うことになる．最初の出会いは，$\boldsymbol{p}$ を出発してからほぼ τ だけ時間が経過してから，ある点 $\boldsymbol{q}$ において起こる（図 44）．点 $\boldsymbol{q}$ の座標を $\chi_1(u)$ であらわそう．まったく同様に，もしもわれわ

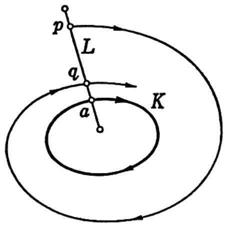


図 44

れが点 $\boldsymbol{p}$ から出発して軌道上を時刻 t が減少する方向に向かって動けば，ほぼ τ だけの時間が経過したのち，点 $\boldsymbol{r}$ においてはじめて線分 L と出会う．点 $\boldsymbol{r}$ の座標を $\chi_{-1}(u)$ であらわすことにする．関数 χ_1, χ_{-1} はともに連続で，互いに他の逆になっている．すなわち

$$\chi_{-1}(\chi_1(u))=u, \quad \chi_1(\chi_{-1}(u))=u.$$

実際，もしも動点が点 $\boldsymbol{q}$ から出発して t が減少する向きに動けば線分 L とは点 $\boldsymbol{p}$ においてはじめて出会うことになり，$\chi_{-1}(\chi_1(u))=u$ である．同様に，動点が点 $\boldsymbol{r}$ から t が増加する向きに動けば，線分 L と点 $\boldsymbol{p}$ においてはじめて出会うことになる．すなわち $\chi_1(\chi_{-1}(u))=u$ となる．関数 $\chi=\chi_1$ を**後続関数**と名づけよう．以下では，この関数が連続であって，しかも連続な逆関数 $\chi^{-1}=\chi_{-1}$ をもつことが重要な役割をはたす．実際には χ も χ^{-1} も連続な導関数をもつが（**C**〕を見よ），この性質は定理 20 の証明には使われない．以上の幾何学的考察は直観的に十分な説得力があるから，これで満足できる読者は，後続関数の存在とその性質が厳密に証明されている命題 **A**〕，**B**〕を読まなくても，定理 20 の証明がわかるだろう．

A〕 $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\xi})$ で初期値 $0, \boldsymbol{\xi}$ をもつ方程式（2）の解をあらわすことにする．L は方程式（2）の相平面 P 上の線分で座標 v が導入されているものとする．したがって，この線分はつぎの1次方程式によってパラメータ表示される：

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{g}(v).$$

いま，時刻 t_0 のときに軌道 $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\xi}_0)$ が線分 L とその内点 $\boldsymbol{a}$（座標 v_0 の）において交わり，しかも線分 L と接しないとしよう．明らかに

$$\boldsymbol{\varphi}(t_0, \boldsymbol{\xi}_0)=\boldsymbol{g}(v_0).$$

このとき，つぎの2つの条件を成り立たせるような正の数 δ と ε とが存在する：1) $|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_0|<\delta$ に対して連続関数 $t(\boldsymbol{\xi})$ および $v(\boldsymbol{\xi})$ が定義され，これらはつぎの条件をみたす：

$$\boldsymbol{\varphi}(t(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{g}(v(\boldsymbol{\xi}))\,;\ t(\boldsymbol{\xi}_0)=t_0\,;\ v(\boldsymbol{\xi}_0)=v_0\,;\ |t(\boldsymbol{\xi})-t_0|<\varepsilon\,; \qquad (3)$$

2) 1) の関数 $t(\xi), v(\xi)$ は一意的に存在する；すなわちもしも $|\xi-\xi_0|<\delta$, $|t-t_0|<\varepsilon$ のとき等式

$$\varphi(t,\xi)-g(v)=0 \tag{4}$$

が成り立てば，ξ, t, v に対して次式が成り立つ：

$$t=t(\xi), \quad v=v(\xi) \tag{5}$$

1), 2) は幾何学的にはつぎのことを意味している：時刻 $t=0$ のときに ξ_0 の近傍の点 ξ から出る軌道は，時刻 t_0 に近い時刻 $t(\xi)$ のとき，v_0 に近い座標 $v(\xi)$ をもつ点において線分 L と交わる．しかも軌道と線分 L とのこのような交叉はある時間区間 $|t-t_0|<\varepsilon$ の中ではただ1回だけおこり，かつ関数 $t(\xi), v(\xi)$ は連続である．

つぎのことは注意を要する．すなわち軌道 $\varphi(t,\xi_0)$ は t_0 以外のある時刻 t_1 においても線分 L と点 $\boldsymbol{a}$ で交わることがある（このようなことは $\varphi(t,\xi_0)$ が周期解の場合におこる），そのとき，時刻 t_1 に応じて定まる関数 $t(\xi)$ ($v(\xi)$ も）は明らかに時刻 t_0 に応じて定まる関数とは異なるものとなる．

A] の証明は，方程式（4）に，ξ を独立変数，t および v をその陰関数と考えて，陰関数に関する定理（§33 を見よ）を適用すれば，すぐにえられる．$\xi=\xi_0$ のとき方程式（4）は自明な解 $t=t_0$, $v=v_0$ をもつ．点 (ξ_0, t_0, v_0) において方程式（4）の左辺の関数行列式が 0 にならないことを証明するため，（4）を成分ごとに書きあらわそう：

$$\varphi^i(t,\xi)-g^i(v)=0, \qquad i=1,2. \tag{6}$$

点 (ξ_0, t_0, v_0) における上式の左辺の t に関する微係数はベクトル $\dot{\varphi}(t_0,\xi_0)$ の成分であり，v に関する微係数はベクトル $-\dfrac{dg(v_0)}{dv}$ の成分にほかならない．軌道 $\varphi(t,\xi_0)$ は時刻 t_0 において線分 L と接しないから，ベクトル $\dot{\varphi}(t_0,\xi_0)$ と $-\dfrac{dg(v_0)}{dv}$ とは1次独立である．したがって（6）の関数行列式は点 (ξ_0, t_0, v_0) において0にならない．ゆえに，方程式（4）に陰関数に関する定理が適用できて，ξ_0 のある近傍 $|\xi-\xi_0|<\alpha$ で定義された（4）の連続な解 $t(\xi)$, $v(\xi)$ で，$\xi=\xi_0$ のとき t_0, v_0 となるものが存在する．

陰関数の存在定理の後半によって，(ξ, t, v)-空間の点 (ξ_0, t_0, v_0) の近傍 U

を見つけて，この近傍の点で方程式（4）をみたすものはすべて方程式（5）をみたすようにできる．しかしながら，この一意性は A］の 2）で主張しているものとちがい，$|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_0|$, $|t-t_0|$ が小さいばかりでなく $|v-v_0|$ も小さくないと言えないことである（定理 27 を見よ）．2）で言う一意性を証明するために，$|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_0|$, $|t-t_0|$ が小さくて点 $(\boldsymbol{\xi},t,v)$ が（4）をみたしていれば，$|v-v_0|$ もまた小さくなることをしめそう．定理 27 で主張する一意性が成り立つ近傍 U は不等式

$$|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_0|<\delta\leqq\alpha,\quad |t-t_0|<\varepsilon,\quad |v-v_0|<\beta$$

で与えられる．§23 の D］から，前もって与えられた小さい数 γ に対して，十分小さい数 δ をえらんで，$|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_0|<\delta$ ならば時間区間 $|t-t_0|<\varepsilon$ 全体において不等式 $|\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\xi})-\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\xi}_0)|<\gamma$ が成り立つようにできる．したがって，$|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_0|<\delta, |t-t_0|<\varepsilon$ のとき，軌道 $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\xi})$ と線分 L との交点は δ が小さければ小さいほど軌道の一部分 $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\xi}_0)\,(|t-t_0|<\varepsilon)$ の近くにあり，これより，交点の座標の差 $|v-v_0|$ が小さいことは δ が十分小さいことで保証される．これで A］が証明された．

B］ $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\xi})$ を初期値 $0,\boldsymbol{\xi}$ をもつ方程式（2）の解とする；さらに $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{a})$ は周期 τ の周期解とし，K は解 $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{a})$ に対応する相平面上の閉曲線，L は曲線 K とただ1点 $\boldsymbol{a}$ において K に接することなく交わり，かつ $\boldsymbol{a}$ をその内点とする線分だとする．線分 L に座標 v を導入して，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{g}(v)$ を L のパラメータ表示とし，点 $\boldsymbol{a}$ の座標を $v=u_0$ としよう．このとき，十分小さい $\alpha>0$ に対して，$|u-u_0|<\alpha$ ならば軌道 $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{g}(u))=\boldsymbol{\varphi}(t,u)$ は $t>0$ のときも，$t<0$ のときにも線分 L と交わる．$\boldsymbol{\varphi}(t,u)$ が L と交わるような正の数 t の最小値を $t_1(u)$，そのときの L 上の点の座標を $\chi_1(u)$ であらわそう．まったく同様に，$\boldsymbol{\varphi}(t,u)$ が L と交わるような負の数 t のうちで絶対値が最小のものを $t_{-1}(u)$，そのときの交点の L 上の座標を $\chi_{-1}(u)$ としよう．そうすれば，十分小さい α に対して $|u-u_0|<\alpha$ のとき，これら4つの関数

$$t_1(u),\quad \chi_1(u),\quad t_{-1}(u),\quad \chi_{-1}(u)$$

は連続で，つぎの条件をみたす：

$$t_1(u_0)=\tau,\quad \chi_1(u_0)=u_0,\quad t_{-1}(u_0)=-\tau,\quad \chi_{-1}(u_0)=u_0.$$

しかも十分小さい u に対して関数 χ_1 と χ_{-1} とは互いに他の逆関数である．すなわち

$$\chi_{-1}(\chi_1(u))=u,\quad \chi_1(\chi_{-1}(u))=u.$$

関数 $\chi=\chi_1$ を**後続関数**と名づけよう．

以上のことがらを証明するため，$\boldsymbol{\xi}_0=\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{g}(u)$, $t_0=k\tau$，ただし k は任意の整数，と考えて命題 A］を利用しよう（実際には $k=-1, 0, 1$ の場合だけを使う）．A］によって，つぎの条件をみたすような連続関数 $t_k(u)=t_k(\boldsymbol{g}(u))$ と $\chi_k(u)=v_k(\boldsymbol{g}(u))$ とが一意的に存在する：

$$\boldsymbol{\varphi}(t_k(u),\boldsymbol{g}(u))=\boldsymbol{g}(\chi_k(u)),\quad t_k(u_0)=k\tau,\quad \chi_k(u_0)=u_0. \tag{7}$$

とくに $\chi_0(u)\equiv u$.

等式

$$\chi_k(\chi_l(u))=\chi_{k+l}(u) \tag{8}$$

を証明しよう．関係式（7）と §26 の C］とから次式がえられる：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}(\chi_k(\chi_l(u)))&=\boldsymbol{\varphi}(t_k(\chi_l(u)),\ \boldsymbol{g}(\chi_l(u)))=\boldsymbol{\varphi}(t_k(\chi_l(u)),\ \boldsymbol{\varphi}(t_l(u),\boldsymbol{g}(u)))\\&=\boldsymbol{\varphi}(t_k(\chi_l(u))+t_l(u),\boldsymbol{g}(u)).\end{aligned}$$

しかもつぎの等式が成り立つ：

$$t_k(\chi_l(u_0))+t_l(u_0)=t_k(u_0)+t_l(u_0)=(k+l)\tau$$
$$\chi_k(\chi_l(u_0))=u_0.$$

他方，

$$\boldsymbol{g}(\chi_{k+l}(u))=\boldsymbol{\varphi}(t_{k+l}(u),\boldsymbol{g}(u))$$

かつ

$$\chi_{k+l}(u_0)=u_0,$$
$$t_{k+l}(u_0)=(k+l)\tau.$$

条件（7）をみたす関数の一意性から

$$t_k(\chi_l(u))+t_l(u)=t_{k+l}(u);$$
$$\chi_k(\chi_l(u))=\chi_{k+l}(u)$$

がえられる．これで関係式（8）が証明された．

とくに，$k=-1$, $l=1$ および $k=1$. $l=-1$ として

$$\chi_{-1}(\chi_1(u))=\chi_0(u)=u,$$

$$\chi_1(\chi_{-1}(u))=\chi_0(u)=u.$$

したがって，関数 $\chi=\chi_1$ と $\chi^{-1}=\chi_{-1}$ とは互いに他の逆関数である．

つぎに，$|u-u_0|$ が十分小さいとき，t が増加する場合には軌道 $\varphi(t,u)$ は時刻 $t_1(u)$ においてはじめて L と交わり，また t が減少する場合には時刻 $t_{-1}(u)$ においてはじめて L と交わることを証明しよう．交わりの一意性（**A**］を見よ）から，区間 $|t-(-\tau)|<\varepsilon$, $|t|<\varepsilon$, $|t-\tau|<\varepsilon$ のおのおのにおいて軌道 $\varphi(t,u)$ は線分 L とただ 1 点で交わる．これらの交点以外には，十分小さい $|u-u_0|$ と $|t|<\varepsilon+\tau$ に対して，軌道 $\varphi(t,u)$ と線分 L とは交わらないことがつぎのようにしてわかる．

$$\varepsilon\leqq t\leqq(\tau-\varepsilon)\quad \text{または}\quad -(\tau-\varepsilon)\leqq t\leqq-\varepsilon \tag{9}$$

のとき，点 $\varphi(t,a)$ がえがく軌道 K の部分 K^* は閉集合であり，しかも閉集合 L と交わらないから，K^* と L との距離 ρ は正である．また，§23 の **D**］によれば，t が集合（9）に属するとき，点 $\varphi(t,a)$ と $\varphi(t,u)$ との距離は $|u-u_0|$ が十分小であるかぎり ρ よりも小さい．したがって，t が集合（9）に属するとき，軌道 $\varphi(t,u)$ も L と交わらない．これで **B**］が証明された．

定理 20 の証明．相平面 P において，曲線 K とただ 1 点 a で K に接することなく交わりかつ a をその内点とする線分 L をひこう．線分 L 上に座標 u を導入し，u_0 を点 a の座標とする．議論をはっきりさせるため，線分 L 上の点で曲線 K の外部にあるものの座標は u_0 よりも大，K の内部にあるものの座標は u_0 よりも小，と考えることにする．線分 L に対する後続関数を χ であらわそう（**B**］を見よ）．そうすれば，十分小さい区間 $|u-u_0|<\alpha$ のどんな数 u に対しても，線分 L 上にあって座標が u の点 p をとおる方程式（2）の軌道は，t が増加するとき，座標が $\chi(u)=v$ の点 q においてはじめて L と交わる．明らかに

$$\chi(u_0)=u_0.$$

また，もしも座標 u が等式

$$\chi(u)=u \tag{10}$$

をみたせば，座標 u の点 p から出る軌道は閉軌道である．仮定によって K は孤立した閉軌道であるから，α を十分小さくとれば，$|u-u_0|<\alpha$ のとき方程式 (10) はただ1つの解 $u=u_0$ しかもたない．このことから，区間 $u_0<u<u_0+\alpha$ 全体において，つぎの不等式のうちのどちらか1つだけが成り立つ：

$$\chi(u)<u, \tag{11}$$

$$\chi(u)>u. \tag{12}$$

実際，もしもこの区間のある点に対しては不等式 (11) が成り立ち，また他のある点に対しては不等式 (12) が成り立ったとすれば，関数 χ の連続性によって，この区間内に等式 (10) をみたすような点 u があるはずであるが，これは不合理である．区間 $u_0<u<u_0+\alpha$ に属する座標 u をもつ点 p から出る軌道は K と交わらないから，点 p も q もともに曲線 K の同じ側（すなわち，K の外部）にあり，したがって

$$\chi(u)>u_0. \tag{13}$$

つぎに，区間 $u_0<u<u_0+\alpha$ において不等式 (11) が成り立っている場合を考えよう．u_1 をこの区間の任意の数とし，

$$u_{i+1}=\chi(u_i), \qquad i=1,2,\cdots\cdots \tag{14}$$

とおいて，数列 $u_1,u_2,\cdots\cdots,u_i,\cdots\cdots$ を帰納的に定義する．不等式 (11) と (13) とによって，これらの数は区間 $u_0<u<u_0+\alpha$ に属し，かつ減少数列であるから，ある極限 u^* をもつ．等式 (14) において $i\to\infty$ とすれば $\chi(u^*)=u^*$ をうる．ところが u^* は区間 $|u-u_0|<\alpha$ に属するから，この区間における方程式 (10) の解の一意性によって，$u^*=u_0$．けっきょく，$\lim_{i\to\infty} u_i=u_0$．線分 L 上の座標 u_i の点を p_i であらわせば，p_1 から出る軌道と線分 L との交点の列 $p_1, p_2,\cdots\cdots$ は K 上の点 a に収束する．いま考えている軌道上を点 p_i から点 p_{i+1} まで動くのに要する時間は極限閉軌道 K の周期 τ に近いから（したがって，それらは有界で），i が増すとともに，点 p_i から点 p_{i+1} までの軌道の部分は閉軌道 K に一層近づく（§23，D］を見よ）．これは，点 p_1 から出る軌道が $t\to+\infty$ のとき K にラ線状にまきついていくことを意味

する．これで，不等式 (11) が成り立っているとき，区間 $u_0<u<u_0+\alpha$ に属する座標 u をもつ線分 L 上の任意の点から出る軌道は $t\to+\infty$ のとき K にラ線状にまきつくことが証明された．

区間 $u_0<u<u_0+\alpha$ において不等式 (12) が成り立っている場合には，χ の逆関数 χ^{-1} に対して，ある区間 $u_0<v<u_0+\beta$ において，不等式

$$\chi^{-1}(v)<v$$

が成り立つ．この不等式を出発点として，前と同様に，区間 $u_0<v<u_0+\beta$ に属する座標 v をもつ線分 L 上の点から出るどんな軌道も，$t\to-\infty$ のとき，閉軌道 K にラ線状にまきつくことがしめされる．

同様にして，十分小さい区間 $u_0>u>u_0-\gamma$ に属する座標 u をもつ線分 L 上の点から出る軌道の状態が考察される．

軌道 K の十分近くをとおる軌道はすべて線分 L と交わり，そのときの交点の座標は u_0 に十分近いから，極限閉軌道の近くのすべての軌道の状態がこれでわかったことになる．これで，定理 20 が完全に証明された．

注 意　u_0 の近傍における関数 $\chi(u)$ の行動と，K の外部および内部にある軌道の行動との関係をひとまとめに述べるため，不等式

$$\left.\begin{aligned}|\chi(u)-u_0|<|u-u_0|\\|\chi(u)-u_0|>|u-u_0|\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

を考えよう．もし曲線 K の（外部または内部の）半近傍において，第1の不等式が成り立っていれば，点 q は線分 L 上で点 p よりも a に近い．したがって，軌道は半近傍において $t\to+\infty$ のとき K にラ線状にまきついていく．また，もしも半近傍において (15) の第2の不等式が成り立っていれば，軌道は半近傍において $t\to-\infty$ のとき K にまきついていく．

C〕 後続関数 $\chi=\chi_1$ とその逆関数 $\chi^{-1}=\chi_{-1}$（**B**〕を見よ）とは連続な導関数をもつ．

このことを証明するため，関数 $\chi_k(u)$, $k=\pm1$, は方程式 (7)：

$$\boldsymbol{\varphi}(t_k, \boldsymbol{g}(u))-\boldsymbol{g}(\chi_k)=0\tag{16}$$

によって定義されることを想起しよう．ここで u は独立変数，t_k および χ_k は u の陰関数である．関数 $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\xi})$ はベクトル $\boldsymbol{\xi}$ の成分に関して連続な偏導関数をもち（定理 17 を見よ），u の1次関数 $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{g}(u)$ は u に関して連続な

導関数をもつから，等式 (16) の左辺は u に関して連続な導関数をもつ．ゆえに，定理 28 によって，方程式 (16) で定義される陰関数 $t_k(u)$, $\chi_k(u)$ は u に関して連続な導関数をもつ．これで C] が証明された．

注 意 後続関数 $\chi(u)$ の幾何学的考察は非常に興味深いものがある．この関数を方程式

$$v=\chi(u) \tag{17}$$

によって (u,v)-平面上のグラフであらわそう．便宜上 $u_0>0$ と考える．方程式 (10) の解をしらべるため，曲線 (17) とともに第1象限の2等分線

$$v=u \tag{18}$$

を考えよう (図 45)．方程式 (10) のすべての解を見つけ出すには，曲線 (17) と (18) と

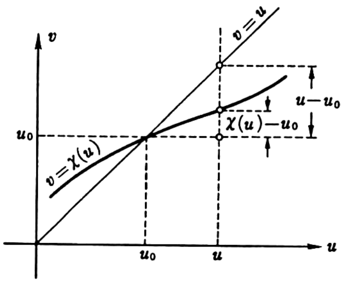


図 45

のすべての交点を求めねばならない．閉軌道 K が極限閉軌道であるためには，点 (u_0, u_0) が2つのグラフ (17) と (18) との孤立交点であることが必要かつ十分である．もし，これらのグラフが点 (u_0,u_0) において互いに接していなければ，すなわち $\chi'(u_0)\neq 1$ であれば，交点 (u_0,u_0) は必らず孤立した交点である．この場合，軌道 K は強い極限閉軌

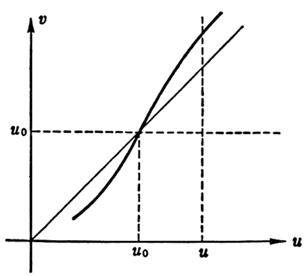


図 46

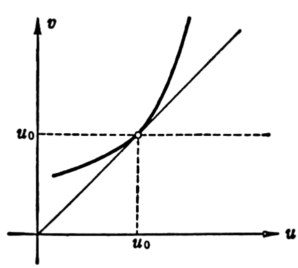


図 47

道であるといわれる．$\chi'(u_0)<1$ の場合には（図 45），K の内部および外部の２つの半近傍において明らかに (15) の第１の不等式が成り立ち，したがって極限閉軌道 K は安定である．$\chi'(u_0)>1$ の場合には（図 46），(15) の第２の不等式が成り立ち，したがって極限閉軌道 K は完全不安定である．

もし２つのグラフ (17) と (18) とが点 (u_0, u_0) において互いに接し，かつ曲線 (17) が２等分線 (18) の一方の側から他方の側へ横切るならば，極限閉軌道 K は安定であるかまたは完全不安定である．また，もし曲線 (17) が２等分線 (18) に接し，かつ (18) の一方の側だけにあれば（図 47），これに応じる極限閉軌道は半安定である．

極限閉軌道が存在するための判定条件

D］ $\varphi(t)$ はすべての $t\geqq t_0$ に対して定義された方程式（２）（n は任意）の１つの解で，つねに領域 Δ 内の有界閉集合 F の中にとどまっているものとする．空間 R の点 $\boldsymbol{p}$ が解 $\varphi(t)$ の ω-**極限点**であるというのは，発散する数列

$$t_1, t_2, \cdots\cdots, t_k, \cdots\cdots; \quad \lim_{k\to\infty} t_k=+\infty \qquad (t_k>t_0)$$

が存在して，

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(t_k)=\boldsymbol{p}$$

となることである．解 $\varphi(t)$ のすべての ω-極限点の集合 Ω を $\varphi(t)$ の ω-**極限集合**という．集合 Ω は空でない有界閉集合であって，完全な軌道からなる．完全な軌道からなるというのは，点 ξ が Ω に属していれば $0, \xi$ を初期値とする解 $\varphi(t, \xi)$ はすべての t に対して定義され，かつ軌道 $\varphi(t, \xi)$ が完全に集合 Ω に含まれることである．明らかに，軌道 $\varphi(t, \xi)$ の ω-極限集合は Ω にすっかり含まれる．

D］ を証明しよう．F は有界閉集合であるから，集合 Ω（明らかに F に含まれる）は空でなく，かつ有界である．Ω が閉集合であることをしめそう．集合 F のある点 $\boldsymbol{p}$ に収束する Ω の１つの点列を

$$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots\cdots, \boldsymbol{p}_k, \cdots\cdots$$

とし，$\boldsymbol{p}$ が Ω に属することを証明する．$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots\cdots, \varepsilon_k, \cdots\cdots$ と $s_1, s_2, \cdots\cdots, s_k, \cdots\cdots$ とを

$$\lim_{k\to\infty}\varepsilon_k=0, \qquad \lim_{k\to\infty}s_k=+\infty$$

であるような 2 つの正数の列とする．点 $\boldsymbol{p}_k$ は Ω に属するから，$t=t_k\geqq s_k$ に対して点 $\boldsymbol{p}_k$ と $\varphi(t_k)$ との距離を ε_k より小さくすることができる．このようにとられた値

$$t_1, t_2, \cdots\cdots, t_k, \cdots\cdots; \qquad \lim_{k\to\infty}t_k=+\infty$$

に対して，

$$\lim_{k\to\infty}\varphi(t_k)=\boldsymbol{p}$$

となる．すなわち点 $\boldsymbol{p}$ は Ω に属する．

つぎに，Ω が完全な軌道からなることを証明しよう．$\boldsymbol{\xi}$ を集合 Ω の任意の点とし，0, $\boldsymbol{\xi}$ を初期値にもつ解を $\varphi(t, \boldsymbol{\xi})$ とする．解 $\varphi(t, \boldsymbol{\xi})$ の定義区間に属する任意の値（負であってもよい）を T とすれば，$\varphi(T, \boldsymbol{\xi})$ は意味をもち 1 つの点をあらわす．点 $\boldsymbol{\xi}$ は Ω に属しているから，発散する数列

$$t_1, t_2, \cdots\cdots, t_k, \cdots\cdots; \qquad \lim_{k\to\infty}t_k=+\infty$$

をとって，

$$\lim_{k\to\infty}\varphi(t_k)=\boldsymbol{\xi} \tag{19}$$

とできる．解 $\varphi(t)$ は十分に大きなすべての t に対して定義されているから，与えられた T とある番号から先の k に対して，

$$\varphi(t_k+T)=\varphi(T, \varphi(t_k))$$

は意味をもつ（§26 の C〕を見よ）．(19) と定理 14 とによって，

$$\lim_{k\to\infty}\varphi(t_k+T)=\lim_{k\to\infty}\varphi(T, \varphi(t_k))=\varphi(T, \boldsymbol{\xi})$$

となり，したがって点 $\varphi(T, \boldsymbol{\xi})$ は Ω に属する．点 $\varphi(T, \boldsymbol{\xi})$ は集合 F にも属するから，軌道 $\varphi(t, \boldsymbol{\xi})$ は t が増加しても減少しても集合 F の外に出ることはできない．したがって §22 の C〕によって，$\varphi(t, \boldsymbol{\xi})$ はすべての t（$-\infty$

$<t<+\infty$) に対して存在する．これで D] が証明された．

ω-極限集合のいくつかの特別な場合を考えてみよう．もし解 $\varphi(t)$ (D] を見よ) が平衡点すなわち $\varphi(t)\equiv x_0$ であれば，解 $\varphi(t)$ の ω-極限集合は明らかに1点 x_0 だけからなる．もし $\varphi(t)$ が閉軌道 K をえがくような周期解であれば，解 $\varphi(t)$ の ω-極限集合は明らかに K に一致する．最後に，もし K が周期解であって，$\varphi(t)$ は $t\to+\infty$ のとき K にラ線状にまきつくような軌道であれば，K は解 $\varphi(t)$ の ω-極限集合である．

つぎに，周期解が存在するための条件を与える1つの定理を述べよう．系(1)の右辺が解析関数の場合には，周期解は極限閉軌道か，またはその近傍が周期軌道ばかりですっかりうめつくされる（例3を見よ)．

定理 21. 『$\varphi(t)$ はすべての $t\geqq t_0$ に対して定義された方程式(2)($n=2$) の解で，つねに領域 Δ 内の有界閉集合 F の中にとどまっているものと仮定する．解 $\varphi(t)$ の ω-極限集合 Ω が平衡点を含まなければ，Ω は1個の閉軌道 K からなる．しかもこのとき，つぎの2つの場合のどちらか1つだけがおこる．1) $\varphi(t)$ 自身が周期解でその軌道は K である；2) $\varphi(t)$ によってえがかれる軌道は $t\to+\infty$ のとき軌道 K にラ線状にまきつく』

証明　$\varphi(t)$ が周期解であれば，集合 Ω は解 $\varphi(t)$ によってえがかれるただ1個の周期軌道 K からなる．したがって定理の主張は明らかである(1) の場合)．つぎに $\varphi(t)$ は周期解ではないとしよう．Ω の任意の点 $\boldsymbol{b}$ をとおる線分 L をひき，かつ点 $\boldsymbol{b}$ における相速度ベクトル $f(\boldsymbol{b})$ と線分 L とが互いに1次独立であるようにする(集合 Ω の点 $\boldsymbol{b}$ は仮定によって平衡点ではないから，$f(\boldsymbol{b})\neq 0$)．また，この線分 L を十分に短かくして，この線分上の点をとおる軌道はすべて $\boldsymbol{b}$ をとおる軌道と同方向にこの線分を(接することなく)横切るようにする (図 48)．点 $\boldsymbol{b}$ は軌道 $\varphi(t)$ の ω-極限点であり，一方 $\varphi(t)$ は閉軌道ではないから明らかにこの軌道は線分 L と互いに異なる点において無限回交わる(A] を見よ)．軌道 $\varphi(t)$ と線分 L との相つづく2つの交点を $\boldsymbol{a}_1=\varphi(t_1)$ および

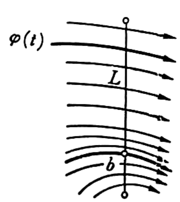


図 48

$\boldsymbol{a}_2=\varphi(t_2)$ $(t_1<t_2)$ とする．軌道 $\varphi(t)$ の $t_1\leqq t\leqq t_2$ に対する切片を M であらわそう．これは線分 $\overline{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2}$ とともに閉曲線 Q をつくり，平面を2つの領域 G_1 と G_2 とに分割する．h を小さな正の数とすれば，幾何学的に明らかなように（図 49），点 $\varphi(t_1-h)$ と $\varphi(t_2+h)$ とは互いに曲線 Q の反対側にある．$\varphi(t_1-h)$ は領域 G_1 に属し，$\varphi(t_2+h)$ は領域 G_2 に属すると考えよう．線分 $\overline{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2}$ を横切る軌道はすべて領域 G_1 から領域 G_2 に入る．したがって，いかなる軌道もこの線分を横切って領域 G_2 から出ることはできない．また，いかなる軌道も曲線 M を横切って領域 G_2 から出ることも入ることもできない．なぜなら M は軌道の切片であり，互いに異なる軌道は交わることができないからである．軌道 $\varphi(t)$ の切片 M はその端点においてのみ線分 L と交わっているから，線分 L の端点は互いに曲線 Q の反対側にある．線分 L の端点で領域 G_2 内にあるものを $\boldsymbol{a}$ であらわそう．軌道 $\varphi(t)$ は $t>t_2+h$ のとき領域 G_2 内にあり，線分 $\overline{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2}$ と交わることはできない．ゆえに点 $\boldsymbol{b}$ は線分 $\overline{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2}$ に属しない（ A］を見よ）．したがって $\boldsymbol{b}$ は線分 $\overline{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}_2}$ 上になければならない．$\boldsymbol{a}_3=\varphi(t_3)$ を $\boldsymbol{a}_2$ のつぎにくる軌道 $\varphi(t)$ と線分 L との交点 $(t_3>t_2)$ とすれば，上と同様な考えかたによって $\boldsymbol{a}_3$ は線分 $\overline{\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}_2}$ 上にあることがわかる（図 49）．軌道 $\varphi(t)$ と線分 L との（時間がたつにつれて）順次につづく交点を

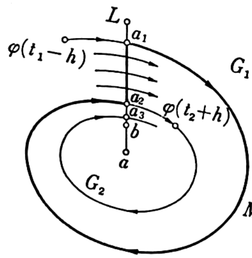


図 49

$$\boldsymbol{a}_4=\varphi(t_4),\cdots\cdots,\boldsymbol{a}_k=\varphi(t_k),\cdots\cdots$$

であらわせば，これらは線分 L 上で $\boldsymbol{a}_1$ から $\boldsymbol{b}$ の方向にむかう単調点列をなすことがわかる．点列 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots\cdots,\boldsymbol{a}_k,\cdots\cdots$ の極限 $\boldsymbol{b}'$ は $\boldsymbol{b}$ に一致することをしめそう．

このためまずはじめに，数列 $t_1,\ t_2,\cdots\cdots,t_k,\cdots\cdots$ が発散することをしめそう．$\lim\limits_{k\to\infty}t_k=\tau<+\infty$ であったとすると，$\varphi(\tau)=\boldsymbol{b}'$ でかつ $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}')=\varphi'(\tau)=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\varphi(\tau)-\varphi(t_k)}{\tau-t_k}$ となるが，これは不合理である．なぜならベクトル $\varphi(\tau)-$

$\varphi(t_k)$ の方向は線分 L と同じであり，一方，ベクトル $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}')$ とこの線分とは互いに1次独立だからである．したがって $\lim t_k=+\infty$ でなければならない．ゆえに軌道 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ は $t\geqq t_1$ のとき L と点 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots\cdots, \boldsymbol{a}_k, \cdots\cdots$ においてのみ交わる．したがって，この軌道は線分 L 上にただ1つの ω-極限点 $\boldsymbol{b}'$ をもち（ A]を見よ)，$\boldsymbol{b}'=\boldsymbol{b}$ となる．この証明ではいまのところ，$\boldsymbol{b}$ 自身が平衡点ではないということだけが使われたことに注意してほしい．

つぎに，軌道 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ は他のいかなる軌道 $\boldsymbol{\psi}(t)$ の ω-極限集合とも交わらないことをしめそう．もしそうでなかったとすると，軌道 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ の各点は $\boldsymbol{\psi}(t)$ の ω-極限点となる（ D]を見よ)．とくに点 $\boldsymbol{a}_1$ もそうである．点 $\boldsymbol{a}_1$ は平衡点ではないから，上で証明した事実によって軌道 $\boldsymbol{\psi}(t)$ と線分 L との交点の列

$$\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2, \cdots\cdots, \boldsymbol{b}_k, \cdots\cdots$$

は $\boldsymbol{a}_1$ に収束する単調点列であり，しかもこれらのほかに線分 L 上には軌道 $\boldsymbol{\psi}(t)$ の ω-極限点は存在しない．ところがこれは，線分 L 上の点 $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \cdots\cdots$ はいずれも軌道 $\boldsymbol{\psi}(t)$ の ω-極限点であることに矛盾する．

けっきょく，つぎのことが証明された．**『閉でない軌道の ω-極限集合が平衡点を含まなければ，その軌道は決して他のいかなる軌道の $\boldsymbol{\omega}$-極限集合とも交わらない』**

点 $\boldsymbol{b}$ をとおる軌道 K は軌道 $\varphi(t)$ の ω-極限集合 Ω に含まれ，かつ Ω は閉集合であるから（D]を見よ)，軌道 K の ω-極限点はすべて Ω に含まれる．したがってそれらは平衡点ではない．それゆえ，上で証明した命題を軌道 K に対して適用することができて，(K は $\varphi(t)$ の ω-極限集合 Ω と b において交わっているから)，K は閉軌道であることがわかる．上述の議論のしかたからわかるように，軌道 $\varphi(t)$ は K にラ線状にまきつく．ゆえに集合 Ω は点 $\boldsymbol{b}$ をとおる閉軌道 K だけからなる．これで定理 21 が証明された．

例

1. （1）の形の方程式系 ($n=2$) で種々の型の周期解をもつもの，とくにいろいろな形の極限閉軌道をもつものの例を与えよう．はじめにこの方程式系を極座標 φ, ρ によっ

て与え，つぎに直交座標に変換する．あとで直交座標に変換することを考えに入れて，この方程式を

$$\dot{\varphi}=1, \quad \dot{\rho}=\rho g(\rho^2) \tag{20}$$

によって与える．ただし $g(u)$ はすべての $u \geqq 0$ に対して定義され，その変数 u について連続微分可能な関数とする．極座標で考える場合には，ρ は正の値だけをとるものとする．$g(\rho^2)=0$ となるような正の数 ρ 全体の集合を N で，また正の数全体の集合における N の補集合を D であらわそう．明らかに N の各数 u_0 に対して，方程式 (20) の解

$$\varphi=t, \quad \rho=u_0$$

が対応し，その軌道 K_{u_0} は閉軌道である．K_{u_0} は原点を中心とする半径 u_0 の円周である．集合 N は正の数全体の集合において閉であるから D は開集合，したがって互いに交わらない有限個または可算個の開区間からなる．有限区間 $u_1<\rho<u_2$ をその1つとすれば，閉軌道 K_{u_1} と K_{u_2} とによって平面 P 上の円環領域 Q がつくられる．区間 $u_1<\rho<u_2$ において関数 $g(\rho^2)$ の符号は変わらないから，この関数に対してこの区間全体でつぎの不等式のうちのどちらか一方だけが成り立つ：

$$g(\rho^2)<0\,; \quad g(\rho^2)>0. \tag{21}$$

系 (20) の解で初期値 $t=0$, $\varphi=0$, $\rho=u$ (ただし $u_1<u<u_2$) をもつものを，

$$\varphi=t, \quad \rho=\rho(t,u) \tag{22}$$

としよう．§15 の例1において証明したことがらによって，関数 $\rho(t,u)$ はすべての t に対して定義され，かつ $t\to+\infty$ のとき区間 $u_1<\rho<u_2$ の端点の1つに近づき，また $t\to-\infty$ のときには他の端点に近づく．このことから $t\to+\infty$ および $t\to-\infty$ のとき軌道 (22) は円周 K_{u_1}, K_{u_2} にラ線状にまきついていくことがわかる．すなわち (21) の第1の不等式が成り立つ場合には，軌道 (22) は $t\to+\infty$ のとき K_{u_1} に，$t\to-\infty$ のとき K_{u_2} にまきつくようなラ線である (図 50)．(21) の第2の不等式が成り立つ場合には，軌道 (22) は $t\to-\infty$ のとき K_{u_1} に，$t\to+\infty$ のとき K_{u_2} にまきつくようなラ線である (図 51)．

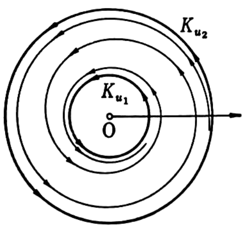


図 50

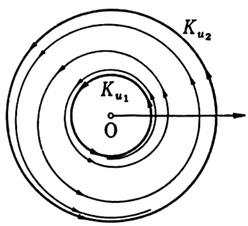


図 51

このように円環領域 Q は，区間 $u_1<\rho<u_2$ において (21) の第1の不等式が成り立つときには上述の第1の種類のラ線ばかりで，また第2の不等式が成り立つときには第2の種類のラ線ばかりでうめつくされる．もし集合 N が有界であれば，u^* をその上限

とするとき，軌道 (22) はいずれも無限区間 $u^*<\rho<+\infty$ において同じ向きに K_{u^*} にまきつき，反対の向きに無限に遠ざかっていく．

点 u_0 が集合 N の孤立点の場合には，閉軌道 K_{u_0} は極限閉軌道であって，その近傍の状態は K_{u_0} に隣接する2つの円環領域をうめつくすラ線軌道の種類に関係する　点 u_0 が集合 N の孤立点でない場合には，周期解 K_{u_0} は極限閉軌道ではない．とくに N が u_0 を内点とする区間を含めば，軌道 K_{u_0} の近傍は閉軌道(原点を中心とする同心円族)ばかりですっかりうめつくされる．u_0 が N に含まれる1つの区間の端点であると同時に D に含まれるもう1つの区間の端点にもなっている場合には，軌道 K_{u_0} の片側は閉軌道でうめつくされて K_{u_0} はそのいちばん端の軌道になり，また K_{u_0} の他の側ではラ線軌道がまきつく．このほか，周期解 K_{u_0} の近傍における閉軌道の模様にはさらにもっと複雑なものも考えられる．たとえば N がカントール (Cantor) の完全集合の場合などである．

こんどは

$$x=\rho\cos\varphi,\qquad y=\rho\sin\varphi \tag{23}$$

とおいて，系 (20) を直交座標によって書きあらわしてみよう．(23) 式を微分すると，次式がえられる：

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=\dot{\rho}\cos\varphi-\rho\dot{\varphi}\sin\varphi=\rho g(\rho^2)\cdot\frac{x}{\rho}-\rho\cdot\frac{y}{\rho}=xg(x^2+y^2)-y,\\ \dot{y}&=\dot{\rho}\sin\varphi+\rho\dot{\varphi}\cos\varphi=\rho g(\rho^2)\cdot\frac{y}{\rho}+\rho\cdot\frac{x}{\rho}=yg(x^2+y^2)+x.\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

したがって系 (20) は直交座標系において

$$\dot{x}=xg(x^2+y^2)-y,\quad \dot{y}=yg(x^2+y^2)+x \tag{25}$$

の形に書かれる (ここに g は，たとえば任意の多項式であってもよい)．原点は系 (25) の平衡点である．

2.　パラメータ μ を含む正規形の1階自律系

$$\dot{x}^1=f^1(x^1,x^2,\mu),\quad \dot{x}^2=f^2(x^1,x^2,\mu)$$

を考えよう．右辺は変数 x^1,x^2,μ に関して連続な1階偏導関数をもつものとする．この系をベクトルの記法によって

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\mu) \tag{26}$$

と書き，また 0, $\boldsymbol{\xi}$ を初期値とする方程式 (26) の解を $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\xi},\mu)$ であらわす．$\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\xi}_0,\mu_0)$ は($\mu=\mu_0$ のときの)方程式 (26) の周期 T の周期解であると仮定する．パラメータ μ を値 μ_0 の近くで動かすとき，この解がどのように変化するかをしらべてみよう．

方程式 (26) の解を，パラメータ μ の値に関係なく同一の平面 P においてえがくことにし，解 $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\xi}_0,\mu_0)$ に対応する閉軌道を K としよう．また平面 P 内になめらかな曲線*) L を考え，ベクトル方程式

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\phi}(u)$$

*)　訳注：$\boldsymbol{\phi}(u)$ が u に関して連続微分可能であること．

をそのパラメータ表示とする．また，L はただ1つの点

$$\xi_0=\varphi(0,\xi_0,\mu_0)=\varphi(T,\xi_0,\mu_0)=\phi(u_0) \tag{27}$$

において，軌道 K と接することなく交わっていると仮定する．いま μ, u を独立変数，t, v をその未知関数とみなして，ベクトル方程式

$$\varphi(t,\phi(u),\mu)-\phi(v)=0 \tag{28}$$

を考えよう．独立変数 u を u_0 の近くで，μ を μ_0 の近くで変化させて，T の近傍と u_0 の近傍において (28) の解 t, v を求めることにする．$u=u_0$，$\mu=\mu_0$ のときには (28) は明らかに解：$t=T$, $v=u_0$ をもち ((27) を見よ)，ベクトル $f(\xi_0,\mu_0)$, $\phi'(u_0)$ は互いに1次独立であるから，(28) の左辺の関数行列式は $u=u_0$，$\mu=\mu_0$ のとき 0 にならない．ゆえに $\mu=\mu_0$ のとき方程式 (28) は閉軌道 K の近傍において，方程式 (26) ($\mu=\mu_0$) に対する後続関数 $v=\chi(u,\mu_0)$ を定める．　μ_0 に近い μ に対してもやはり関数 $v=\chi(u,\mu)$ が方程式 (28) によって定まり，これを閉軌道 K の近傍における方程式 (26) の<u>後続関数</u>と考えることができる．しかし，$\mu\neq\mu_0$ のとき方程式 (26) は周期解をもたないこともありうる．μ_0 の近傍の μ に対して方程式 (26) の周期解を求めるため，μ を変数とする未知関数 $u(\mu)$ に関する方程式

$$\chi(u,\mu)-u=0 \tag{29}$$

を考えよう．もし方程式 (29) の左辺の（変数 u に関する）導関数が $u=u_0$，$\mu=\mu_0$ のとき 0 でなければ，すなわち

$$\frac{\partial}{\partial u}\chi(u_0,\mu_0)\neq 1 \tag{30}$$

であれば，明らかに方程式 (29) は微分可能な解 $u(\mu)$ をもつ．そのとき，方程式 (26) は μ_0 のある近傍に属する任意の μ に対してただ1つの周期解をもち，この周期解は μ に関してなめらかであって，$\mu=\mu_0$ のときには閉軌道 K になる．条件 (30) は閉軌道 K が<u>強い</u>（225 ページの注意を見よ）ことを意味し，上の結果はまさに《強い》ということばを裏づけるものである．すなわち強い極限閉軌道は (26) の右辺のわずかな変化に対しては<u>消滅せず</u>（強いままであって），このような変化に《影響されない》のである．

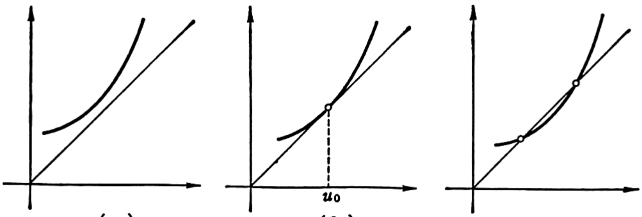
(u,v)-平面において，方程式

$$v=\chi(u,\mu) \tag{31}$$

のグラフが $\mu=\mu_0$ のとき点 (u_0,u_0) において直線

$$v=u \tag{32}$$

と第1位の接触をしていれば（図 52 (b))，曲線 (31) は $\mu=\mu_0$ のとき直線 (32) の片側にあって，極限閉軌道 K は半安定となる (図 53, (b))．パラメータ μ が μ_0 の近傍を動くときのグラフ (31) の変化で最も本質的なのはつぎの場合である：μ_0 の一方の側にある μ に対しては，グラフ (31) と (32) との交点はまったく存在しないが (図 52, (a))，μ_0 の他の側にある μ に対しては，グラフの交点が<u>2個</u>あらわれて（図 52, (c))，



(a)　　　　(b)　　　　(c)

図　52

方程式 (26) は K の近くに2個の強い極限閉軌道をもつようになる(図53, (c)). すなわ

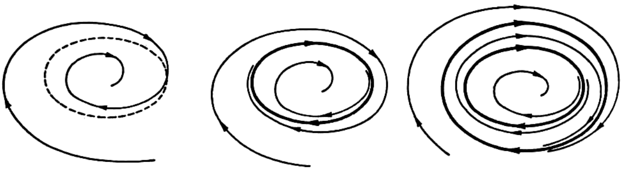

(a)　　　　(b)　　　　(c)

図　53*)

ち, パラメータ μ が μ_0 を通過する場合, はじめは極限閉軌道は存在しないが(図53, (a)), $\mu=\mu_0$ のとき半安定な1個の閉軌道があらわれ, さらにパラメータ μ が変化していくと, その閉軌道が2個の強い極限閉軌道に分解する. この現象を方程式 (26) の右辺が変化する場合の極限閉軌道の《発生》とよんでいる.

3. 方程式 (2) の右辺が解析的な場合に周期解 K がもつとくに重要な二, 三の性質を述べよう. (2) の右辺が解析的ならば, (2) の解 $\varphi(t,\xi)$ は変数 t, ξ^1, ξ^2 の解析関数になるが, ここではこの事実を証明なしにもちいる. さらに後続関数を定義するときにもちいた曲線 L も解析的ならば, すなわち L が解析的な方程式によって与えられているならば, 後続関数 $\chi(u)$ も解析的な方程式の解としてやはり解析関数になる.

関数 $\chi(u)-u$ の零点には方程式 (2) の周期解が対応するから, 関数 $\chi(u)$ の解析性によって, 互いに排反するつぎの2つの場合だけがおこりうる : 1) 周期解 K は極限閉軌道である (u_0 が関数 $\chi(u)-u$ の孤立零点の場合) ; 2) 周期解 K の近傍が (2) の周期解ばかりですっかりうめつくされる (関数 $\chi(u)-u$ が恒等的に0に等しい場合). ゆえに, もし軌道 K に少なくとも1つの軌道がラ線状にまきついていれば, 2) の場合はおこらず, K は極限閉軌道となる.

このように, (2) の右辺が解析関数ならば, 定理21の 2) の場合には周期解 K は極限閉軌道である.

---

*) 訳注 : この図は L 上の点の座標 u が K の外部では $u<u_0$, K の内部では $u>u_0$ となるように導入されている場合のものである.

§29. 真空管発振器

ここでは周期的な(消滅しない)電気振動をおこす真空管発振器の構造の概略を述べることにする．とくに，発振器のはたらきに関する数学的理論を述べる．真空管発振器のはたらきを記述する方程式は線形ではなく，その極限閉軌道がまさに発振器によって発振された周期振動に対応するのである．極限閉軌道の数学的概念と真空管発振器によって発振された消滅しない振動の物理的概念との対応関係をはじめて確立したのはソビエトのすぐれた学者アンドローノーフ (A. A. Андронов) である．

アンドローノーフ以前の研究では，真空管発振器のはたらきを線形微分方程式によって解明することがこころみられたが，その方法では発振器のはたらきの正しい数学的記述はえられなかった．

A］ 3極管（真空管の1種）は3端素子 aks である．3極管の記号的なあらわしかたは図54にしめしてある．a は陽極（アノード），k は陰極（カソード），s は格子（グリッド）である．s と k とのあいだには電位差 U_s（格子電圧）が与えられるが，そのあいだに電流は流れない．a から k の方に管内を電流 I_a（陽極電流）が流れる．3極管のはたらきを記述する法則は，次式によって与えられる：

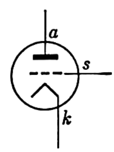


図 54.

$$I_a=f(U_s). \tag{1}$$

関数 f は3極管の特性関数（または特性）とよばれている．いま，この関数は正の単調増加関数であって，つぎの条件をみたしていると仮定しよう：

$$\lim_{U_s\to-\infty} f(U_s)=0,$$

$$\lim_{U_s\to+\infty} f(U_s)=I_N.$$

ここに I_N は3極管の飽和電流である（図55）．ふつうは，さらに関数 $f'(U_s)$ が $U_s=0$ において最大値をとると仮定される．ここで3極管と名づけた3端素子は，実際には真空管のほかに，陽極電池，格子電池，および陰極加熱電池

なども含んでいる.

B〕 陽極回路網に発振閉回路をもつ真空管発振器の構造はつぎのようなものである(図 56). すなわちそれは4個の接続点 a, k, s, b をもつ回路で, 特性 $f(U_s)$ の3極管 aks(A〕を見よ), 容量 C のコンデンサ ak, 抵抗 ab (抵抗値 R), インダクタンス L のコイル bk, およびもう1つのコイル sk (インダクタンスはとくに明示する必要がない) とからなり, コイル kb と ks とは相互インダクタンス $-M\,(M>0)$ によって結ばれている. 抵抗 ba をとおる電流の強さを J (これはコイルをとおる電流の強さと同じである) とすれば,

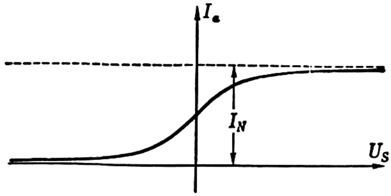


図 55 3極管の特性

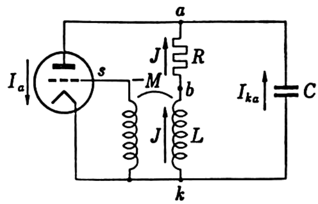


図 56

$$J=I_{ba}=I_{kb}$$

であって, J は時刻 t の関数としてつぎの微分方程式をみたすことがわかる:

$$L\ddot{J}+R\dot{J}+\frac{J}{C}=\frac{1}{C}f(M\dot{J}). \qquad (2)$$

方程式 (2) をみちびいてみよう. キルヒホフの第1法則によって,

$$J+I_{ka}=I_a. \qquad (3)$$

ただし I_{ka} はコンデンサ ka をとおる電流である. このほかに, 3極管の性質から

$$I_{sk}=0 \qquad (4)$$

である. 振動閉回路 $kbak$ にキルヒホフの第2法則を適用することによって, 次式がえられる:

$$L\dot{I}_{kb}+RI_{ba}+\frac{1}{C}\int I_{ak}dt=0.$$

この関係を微分すれば,

$$L\ddot{I}_{kb}+R\dot{I}_{ba}+\frac{1}{C}I_{ak}=0 \tag{5}$$

となる．コイル kb と ks とのあいだの相互インダクタンスによって ((4) および §13 の B] を見よ),

$$U_s=M\dot{I}_{kb} \tag{6}$$

となる．ゆえに関係式 (1), (3), (5), (6) から (2) がみちびかれる．

C] 方程式 (2) は変数 J, $\dot{J}$ の相平面において，ただ1つの平衡点

$$J=f(0), \quad \dot{J}=0 \tag{7}$$

をもつ．この平衡点は，

$$R>\frac{M}{C}f'(0) \tag{8}$$

の場合には漸近安定であり，また

$$R<\frac{M}{C}f'(0) \tag{9}$$

の場合には完全不安定である (§26 の F] を見よ).

$(J,\dot{J})$-平面の無限遠点はつねに完全不安定である．これは，$(J,\dot{J})$-平面において十分に大きな円 K が存在して，方程式 (2) のいかなる軌道もある時刻以後はこの円内にはいり，かつその中にとどまるという意味である．不等式 (9) が成り立っているときには平衡点 (7) は完全不安定であるから，定理 21 (§28 を見よ) によって，平衡点 (7) と異なる任意の軌道の ω-極限集合は1つの閉軌道である．したがってこの場合，真空管発振器は消滅しない周期的な電気振動をおこすことになる．

注 意　特性関数 f を適当にえらべば方程式 (2) はただ1つの極限閉軌道をもち，方程式 (2) の平衡点 (7) と異なる軌道はすべてこの極限閉軌道にまきつくようになる．あとでこのような性質をもつ特性関数の1つの例をしめす．

さて，C] を証明するために，未知関数 J のかわりに

$$J=x+f(0) \tag{10}$$

とおいて，あたらしい未知関数 x を導入しよう．こうすることによって，点 (7) には $(x,\dot{x})$-平面の原点が対応する．

置換 (10) をおこなえば，方程式 (2) は

$$\ddot{x}+\frac{R}{L}\dot{x}+\frac{1}{LC}x=\frac{1}{LC}[f(M\dot{x})-f(0)] \tag{11}$$

となる．この方程式の右辺の関数を $g(\dot{x})$ とおけば，ただちにわかるように，関数 g は有界な単調増加関数であって，変数 $\dot{x}$ が 0 のときにかぎって 0 になる(図 57)．つぎに

$$\frac{R}{L}=2\delta,\quad \frac{1}{LC}=\omega^2$$

とおいて，方程式 (11) を

$$\ddot{x}+2\delta\dot{x}+\omega^2x=g(\dot{x})$$

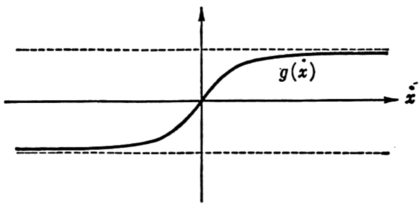


図 57

の形に書きあらわそう．あたらしい変数 $y=\dot{x}$ を導入すると，上の方程式は正規形の方程式系

$$\begin{cases} \dot{x}=y, \\ \dot{y}=-\omega^2x-2\delta y+g(y), \end{cases} \tag{12}$$

になる．この系の平衡点を求めるため，その右辺を 0 に等しいとおくと

$$\begin{cases} y=0, \\ -\omega^2x-2\delta y+g(y)=0, \end{cases}$$

となる．この連立方程式はただ 1 つの解：

$$x=0,\qquad y=0$$

をもつから，原点は系 (12) のただ 1 つの平衡点である．ゆえに点 (7) は方程式 (2) のただ 1 つの平衡点であることがわかった．

つぎに系 (12) の平衡点の安定条件をしらべてみよう．そのため，この系を点 (0,0) において線形化すると，

$$\begin{cases} \dot{x}=y, \\ \dot{y}=-\omega^2x-2\delta y+g'(0)y, \end{cases} \tag{13}$$

がえられる．簡単な計算によって，線形系 (13) の特性多項式は

$$\lambda^2+(2\delta-g'(0))\lambda+\omega^2$$

であることがわかる．あたらしい記号によれば，条件 (8) および (9) はそれぞれ $2\delta>g'(0)$ および $2\delta<g'(0)$ となる．したがって，条件 (8) が成

り立つときには平衡点 (0, 0) は漸近安定であり（定理 19 および §9 の **B**]を見よ），また条件 (9) が成り立つときには平衡点 (0,0) は完全不安定である (§26 の **F**] を見よ).

相平面 (x, y) の遠くの部分における系 (12) の軌道の行動を解明するため，平面全体で有界な項 $g(y)$ を系 (12) からとりさってえられる線形系

$$\begin{cases} \dot{x}=y, \\ \dot{y}=-\omega^2 x-2\delta y, \end{cases} \tag{14}$$

を考えよう．簡単な計算によって，系 (14) の特性多項式は

$$\lambda^2+2\delta\lambda+\omega^2 \tag{15}$$

であることがわかる．2δ および ω^2 は正の数であるから，(15) の根は負の実部をもつ．したがって §26 の **E**] によって，線形系 (14) に対してつぎの条件をみたすリャプーノフ関数 $W(x, y)$ が存在する：

$$\dot{W}_{(14)}(x, y) \leqq -\beta W(x, y). \tag{16}$$

ここで関数 $W(x, y)$ の系 (12) にもとづく導関数 $\dot{W}_{(12)}(x, y)$ を計算すると，

$$\dot{W}_{(12)}(x, y)=\dot{W}_{(14)}(x, y)+\frac{\partial W(x, y)}{\partial y} g(y) \tag{17}$$

となる．関数 $g(y)$ は有界であるから，不等式

$$\left|\frac{\partial W(x, y)}{\partial y} g(y)\right| \leqq \gamma \sqrt{W(x, y)} \quad (\gamma \text{ は正の定数}) \tag{18}$$

が成り立つ (§26 の公式 (14) を見よ).

いま

$$c=\frac{2\gamma}{\beta}, \quad \alpha=\frac{\beta}{4}$$

とおけば，(16)，(17) および (18) によって，不等式

$$W(x, y) \geqq c^2 \text{ のとき } \dot{W}_{(12)}(x, y) \leqq -2\alpha W(x, y) \tag{19}$$

がえられる．方程式

$$W(x, y)=c^2 \tag{20}$$

は (x, y)-平面において 1 つの楕円を定める．不等式 (19) からただちにわかるように，楕円 (20) 上の任意の点 (x, y) を考えると関数 $W(x, y)$ はその点

をとおる系 (12) の軌道にそって減少する．したがって系 (12) の軌道はすべて楕円 (20) を横切ってこの楕円の中にはいる．

これを証明しよう．楕円 (20) の外部の点 (ξ,η) を始点とする系 (12) の解を

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t) \tag{21}$$

とする．

$$w(t)=W(\varphi(t),\psi(t))$$

とおいたとき，

$$w(t)\geqq c^2$$

ならば，不等式

$$\dot{w}(t)\leqq -2\,\alpha w(t) \tag{22}$$

が成り立つ．この不等式を積分すれば，

$$W(\varphi(t),\psi(t))\leqq W(\xi,\eta)e^{-2\alpha t}$$

となる．このことから，軌道 (21) は必らず楕円 (20) の内部にはいることがわかる．一方，いかなる軌道も決してこの楕円の内部から外部へは出られない．なぜなら，どんな軌道もこの楕円の周上の点においては楕円の内部にはいり込んでいるからである．

いま，楕円 (20) を含むような (x,y)-平面上の1つの円を K としよう．上で証明した事実から，平衡点 (0,0) と異なる系 (12) のどんな軌道も円 K の内部にはいり，その中にとどまることがわかる．一方，点 (0,0) は完全不安定であるから，どの軌道も (0,0) を ω-極限点にもつことはできない．ゆえに定理 21 (§28 を見よ) によって，平衡点 (0,0) 以外の軌道は周期解にまきつくようなラ線か，またはそれ自身周期解である．

これで C] が証明された．

例

真空管発振器に対してはじめて非線形方程式 (2) を確立した A. A. アンドロノーフは，3 極管の特性関数 $f(x)$ がとくに簡単な場合，すなわち $x<0$ のとき $f(x)=0$，x

>0 のとき $f(x)=b$ (b は正の定数) の場合を研究した. $f(0)=\dfrac{b}{2}$ と考えて変数変換 (10) をおこなえば, 系 (12) がえられる. このとき, $g(y)$ は次式によって与えられる:

$$g(y)=\begin{cases}-\omega^2 a, & y<0 \text{ のとき}, \\ \omega^2 a, & y>0 \text{ のとき}, \end{cases} \tag{23}$$

ただし $a=\dfrac{b}{2}$. このような不連続関数 $g(y)$ をもつ方程式系 (12) は $y>0$ の場合には, すなわち上-半平面においては,

$$\begin{cases}\dot{x}=y, \\ \dot{y}=-\omega^2 x-2\delta y+\omega^2 a\end{cases} \tag{24}$$

の形に書かれ, また $y<0$ の場合には, すなわち下-半平面においては,

$$\begin{cases}\dot{x}=y, \\ \dot{y}=-\omega^2 x-2\delta y-\omega^2 a\end{cases} \tag{25}$$

の形に書かれる. いま多項式 (15) の根は虚根であると考えよう. そのとき, 系 (14) の平衡点 (0,0) は安定渦状点である (§16 の C] を見よ). 系 (24), (25) は系 (14) を平行移動しただけのものであって, それらの平衡点は系 (14) とちがって原点にはない. 系 (24) の平衡点は $(a,0)$ にあり, 系 (25) の平衡点は $(-a,0)$ にある. 線形系 (14) のラ線軌道は平衡点 (0,0) に時計の針と同方向にまきつき, かつラ線上を半回転するごとに動点は原点に近づく. しかも動点と原点との距離は, 動点の最初の位置に無関係に半回転ごとに $\lambda(<1)$ 倍される (§16 の C] を見よ).

関数 $g(y)$ が (23) 式によって与えられている場合, 系 (12) の解の相平面における行動を知るには, 上-半平面を系 (24) のラ線軌道の半回転分でうめつくし, 下-半平面を系 (25) のラ線軌道の半回転分でうめつくしたものを考えて, 動点が直線 $y=0$ を通過する際, 一方の軌道から他方の軌道へ連続的に移行するようにすればよい. このことを考慮して, 系 (12) の閉軌道を求めてみよう.

横軸上の座標 $\xi>0$ の点を始点とする系 (12) ((23) を見よ) の軌道を考えよう. 系 (12) の相平面における動点の運動は時計の針と同方向であるから, 軌道は点 $(\xi,0)$ から下-半平面へ動き, したがって系 (25) によって記述される. 下-半平面においてラ線上を半回転した動点は, こんどは横軸上の座標

$$-(a+\lambda(a+\xi)) \tag{26}$$

の点に到達する. このことは, 動点がラ線上を半回転すると平衡点 $(-a,0)$ からの距離が λ 倍されるということからわかる. 横軸上の座標 (26) の点から出る軌道は系 (24) をみたし, 上-半平面においてラ線の半回転分をえがいたのち, 横軸上の座標

$$a+\lambda(2a+\lambda(a+\xi)) \tag{27}$$

の点に達する. したがって横軸上の座標 $\xi(>0)$ の点を始点とする軌道は1回転したのちふたたび横軸の正の部分にある座標 (27) の点に達する. こうして,

$$\chi(\xi)=a+2\lambda a+\lambda^2 a+\lambda^2\xi$$

によって定義される横軸の正の部分からそれ自身の中への写像χがえられる．関数$\chi(x)$は系 (12) ((23) を見よ) に対する後続関数である．条件

$$\chi(\xi)=\xi$$

をみたす値ξは1つだけ存在し，かつこの値ξに系 (12) の極限閉軌道が対応する．この場合 $\chi'(\xi)=\lambda^2<1$ であるから，これは強い極限閉軌道であり，しかも安定である (§28 を見よ).

§30.　2階の自律系の平衡点

ここでは，正規形の2階自律方程式系：

$$\begin{cases}\dot{x}=f(x,y),\\ \dot{y}=g(x,y),\end{cases} \tag{1}$$

の退化しない平衡点を分類しかつ考察する．ただし（1）の右辺は2回連続微分可能であると仮定し，定理 23 では3回連続微分可能であると仮定する．

退化しない平衡点

平衡点を原点に移すことはいつでもできるから，これから考察する系（1）の平衡点は原点にあると仮定しよう．系（1）を線形化して，すなわち系（1）の右辺を x,y に関してテイラー (Taylor) 展開して2次以上の項をとりさると，つぎの線形系：

$$\begin{cases}\dot{x}=a_1^1x+a_2^1y,\\ \dot{y}=a_1^2x+a_2^2y,\end{cases} \tag{2}$$

がえられる．λ, μ を行列 (a_j^i) の固有値としよう．系（1）の平衡点 (0,0) が**退化しない**というのは，λ, μ が互いに異なり，かつそれらの実部が0でないことである．線形系（2）の軌道の状態については §16 においてくわしくしらべた．ここでは，系（1）の平衡点 (0,0) が退化しない場合には，この点の近傍における（1）の軌道の状態は本質的には系（2）の平衡点の近傍における軌道の状態と同じであることをしめそう．

系（1）の平衡点 (0,0) に対して，§16 で定義した呼び名をそのまま使用する．すなわち λ, μ がともに負の実数であれば，(0,0) を**安定結節点**という．もし λ, μ がともに正の実数であれば，(0, 0) を**不安定結節点**という．λ, μ が

負の実部をもつ互いに共役な複素数であれば，(0,0) を安定渦状点という．λ，μ が正の実部をもつ互いに共役な複素数であれば，(0,0) を**不安定渦状点**という．最後に λ，μ が実数であって異符号ならば，(0,0) を**鞍形点**という．

平衡点の近傍における軌道の状態に関する最も簡単な性質は，直接にリャプーノフの定理（定理 19）および §26 の **F**］によって明らかにされる．すなわち，つぎの命題がえられる．

A］ 安定結節点および安定渦状点は漸近安定な平衡点である．不安定結節点および不安定渦状点は完全不安定な平衡点である．

この命題によって，結節点および渦状点の近傍における軌道の行動はすでにかなりの程度まで明らかにされる．実際，与えられた平衡点が漸近安定であることがわかれば，応用の見地からは，軌道がこの点にどのように近接していくかということはもはや重要でない場合が多い．同じことが完全不安定な平衡点についてもいえる．まったくちがった役割をはたすのは鞍形点である．この点の近傍における軌道の行動を知ることによって，全平面における軌道の状態について重要な判断を下すことができる．それだけに，鞍形点の近傍における軌道の行動に関する定理の証明は，結節点や渦状点に対する同様な定理の証明よりもはるかにむずかしい．

いま系（1）の相平面において座標の1次変換をおこなって，（1）がとくに簡単な形になるようにしよう．

B］ 系（1）の右辺を x，y に関して2次の項までテイラー級数に展開すると，次式がえられる：

$$\begin{cases}\dot{x}=a_1^1x+a_2^1y+r(x,y),\\ \dot{y}=a_1^2x+a_2^2y+s(x,y).\end{cases}\tag{3}$$

ただし $r(x,y)$，$s(x,y)$ とその x,y に関する1階導関数は点 $x=0$，$y=0$ において 0 になり，つぎの形に書かれる：

$$\begin{cases}r(x,y)=r_{11}x^2+2r_{12}xy+r_{22}y^2,\\ s(x,y)=s_{11}x^2+2s_{12}xy+s_{22}y^2.\end{cases}\tag{4}$$

ここで《2次形式》の係数 r_{ij}, s_{ij} は原点の近傍において有界な（変数 x,y の）

関数である．さてこのとき，変数 x, y から変数 ξ, η への実1次変換によって，系（3）をつぎの2つの形のいずれかに変換できる．

1) 行列 (a^i_j) の固有値 λ, μ が互いに異なる実数の場合：

$$\dot{\xi}=\lambda\xi+\rho(\xi,\eta),\qquad \dot{\eta}=\mu\eta+\sigma(\xi,\eta). \tag{5}$$

2) 行列 (a^i_j) の固有値が複素共役な場合，すなわち固有値が $\mu+i\nu$, $\mu-i\nu$ という形の場合：

$$\dot{\xi}=\mu\xi-\nu\eta+\rho(\xi,\eta),\qquad \dot{\eta}=\nu\xi+\mu\eta+\sigma(\xi,\eta). \tag{6}$$

上のいずれの場合にも，最後の項 $\rho(\xi,\eta)$, $\sigma(\xi,\eta)$ は関数 $r(x,y)$, $s(x,y)$ と同様な性質をもつ．

B］を証明するには，座標 x,y を座標 ξ,η にうつすような1次変換で線形系（2）を簡単な形にしてしまうようなものを見つければよい．第1の場合には，行列 (a^i_j) の固有ベクトルをあたらしい座標系にとれば，系（3）は（5）の形になる．第2の場合には，§14 の **F**］で述べたと同様の変換をおこなうことによって，系（3）は（6）の形になる．

鞍形点の近傍における軌道の状態

定理 22. 『系（1）の平衡点 $O=(0,0)$ を鞍形点であると仮定しよう．点 O をとおる直線のうちで，行列 (a^i_j) の負の固有値に対応する固有ベクトルと同じ方向をもつものを P，行列 (a^i_j) の正の固有値に対応する固有ベクトルと同じ方向をもつものを Q とする．このとき，$t\to+\infty$ のとき点 O に漸近的に近づくような系（1）のちょうど2つの軌道 U_1, U_2 が存在する（図58）．この2つの軌道に点 O をつけ加えれば微分可能な連続曲線 U がえられ，これは点 O において直線 P に接する．まったく同様に，$t\to-\infty$ のとき点 O に漸近的に近づくような系（1）のちょうど2つの軌道 V_1, V_2 が存在する．この2つの軌道に点 O をつけ加えれば微分可能な連続曲線 V がえられ，これは点 O において直線 Q に接する．点 O の近くをとおる系（1）のその他の軌道は，一般に，方程式が線形な場合と同様な

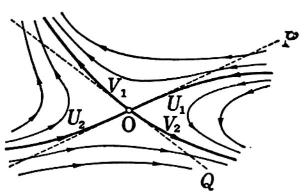


図 58

行動をする（§ 16 を見よ）』

軌道 U_1, U_2 を鞍形点 O の**安定接触線**，軌道 V_1, V_2 を鞍形点 O の**不安定接触線**という．

証明　まず，直線 P を横軸に，直線 Q を縦軸にすれば，系（1）は（5）の形に書ける．ξ, η をあらためて x, y であらわせば，方程式系

$$\begin{cases} \dot{x}=f(x,y)=\lambda x+r(x,y), \\ \dot{y}=g(x,y)=\mu y+s(x,y), \end{cases} \tag{7}$$

がえられる．ここで $r(x,y)$, $s(x,y)$ は（4）の形をしている．$\lambda<0$, $\mu>0$ としよう．以下の証明では，系（7）の右辺が x, y に関して連続微分可能なこと，および関数 r_{ij}, s_{ij} が原点の近傍において有界なことだけが使われることに注意してほしい．

証明はつぎの 2 つの主要部分にわけられる：a）$x\to 0$ のとき横軸の正の部分にそって点 O に近づくような接触線 U_1 が存在することの証明；b）そのような接触線の一意性の証明．まったく同様に，接触線 U_2 の存在とその一意性とが証明される．接触線 V_1, V_2 を考察する場合には，時間 t の符号を変えればよい．そのとき安定接触線は不安定接触線になり，不安定接触線は安定接触線になる．

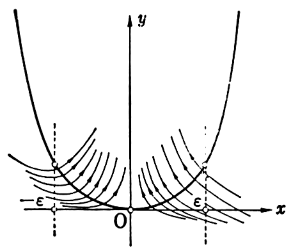


図　59

さて，接触線 U_1 の存在を証明しよう．このため，

$$\omega(x,y)=y-\alpha x^2 \quad (\alpha>0)$$

とおいて，(x,y)-平面上で方程式

$$\omega(x,y)=0 \tag{8}$$

で与えられる放物線を考えよう．放物線（8）は平面を正領域（縦軸の正の部分を含む領域）と負領域の 2 つの部分にわける．正領域，負領域をそれぞれ放物線の内部，外部ともいう．はじめに，α が十分大きい正の数で x が十分小さい（$|x|\leqq\varepsilon$）場合には，放物線（8）の $|x|\leqq\varepsilon$ の部分を横断する（7）の軌道は（平衡点 O をのぞき）すべて負領域から正領域へ，すなわち放物線の外部から内部にはいり込むことをしめそう（図 59）．それ

には，関数 $\omega(x,y)$ の導関数 $\dot{\omega}_{(7)}(x,y)$ を計算する．系（7）より，放物線（8）上の点においては

$$\dot{\omega}_{(7)}(x,\alpha x^2)=\dot{y}-2\alpha x\dot{x}=\alpha(\mu-2\lambda)x^2+s_{11}x^2+\cdots\cdots$$

となる（ここで …… の部分は x に関して3次以上の項ばかりからなる）．$\mu-2\lambda$ は正の数で，関数 s_{11} は原点の近傍において有界であるから，αを十分に大きくえらべば，

$$\alpha(\mu-2\lambda)-|s_{11}|>\delta \quad (\delta>0)$$

とすることができる．上の $\dot{\omega}_{(7)}(x,\alpha x^2)$ の計算で省略された項は x に関して少なくとも3次の無限小であるから，正の数 ε が存在して，$|x|\leqq\varepsilon$ のとき

$$\dot{\omega}_{(7)}(x,\alpha x^2)\geqq 0$$

となる．ここで等号が成り立つのは $x=0$ の場合すなわち点 O においてだけである．以上の証明からわかるように，系（7）の軌道は(平衡点 O をのぞいて）すべて放物線（8）の $|x|\leqq\varepsilon$ の部分を外部から内部へと横断する．

まったく同様にして，放物線

$$y+\alpha x^2=0 \qquad (9)$$

の $|x|\leqq\varepsilon$ の部分では，系（7）の（平衡点Oをのぞく）軌道はすべて（9）の外部から内部(縦軸の負の部分を含む領域)にむかって（9）を横断することが証明される（図 60)．

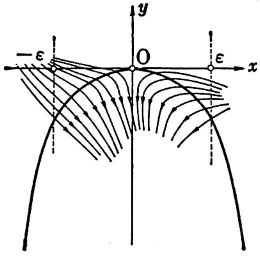


図 60

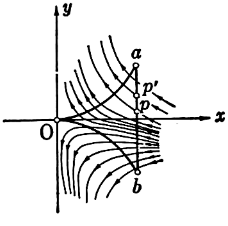


図 61

直線 $x=\varepsilon$ が放物線（8)，（9）と交わる点をそれぞれ a,b とし，放物線の2つの弧と閉線分 $[a,b]$ とからなる三角形 $[O,a,b]$ を考えよう．ε が十分

小さい場合には，三角形$[O, a, b]$内をとおる系(1)の軌道はすべて右から左へと動き(図 61)，とくに軌道が三角形$[O, a, b]$内に入るときには閉線分$[a, b]$を横切ることがわかる．これは，$\lambda<0$ かつ $r(x, y)$ は原点の近傍において有界な係数をもつ x, y の《2次形式》であるから，$0<x\leqq\varepsilon$, $|y|<\alpha x^2$ のとき

$$\dot{x}=\lambda x+r(x, y)$$

が負になることからただちにいえる．

$t=0$ のとき開線分 (a, b) 上の点 p を始点とする系(7)の軌道を $\varphi(t, p)$ としよう．この軌道は $[a, b]$ を横切って三角形 $[O, a, b]$ の中に入り，t が増加するとき，放物線の弧 Oa または Ob を横断して三角形の外に出るか，三角形からまったく外に出ないかのいずれかである．この第2の場合には，軌道は $t\to+\infty$ のとき点 O に漸近的に近づく．図からもわかるように，軌道 $\varphi(t, p)$ が弧 Oa を越えて三角形の外部に出るならば，開線分 (a, p) 上の点 p' に対し，軌道$\varphi(t, p')$もまた弧Oaを越えて三角形の外部に出る(図 61)．また軌道$\varphi(t, p)$が弧 Oa を越えて三角形の外部に出る場合には，解が初期値に関し連続なことを主張する定理(定理 14 および §23のE])によって，点p'に十分近い点p''に対して，軌道$\varphi(t, p'')$もまた弧Oaを越えて三角形の外部に出る．ゆえに，$\varphi(t, p)$が弧Oaを横断して三角形からぬけ出るような点pの全体は開線分(a, b)に含まれる開線分 (a, a') となる(a に十分近い点 p を始点とする軌道はいずれも明らかに弧 Oa を横切るから，$a\neq a'$ であり開線分 (a, a') は空でない)．まったく同様に，軌道 $\varphi(t, p)$ が弧 Ob を横断して三角形の外に出るような点 p の全体は開線分 (a, b) に含まれる開線分 (b, b') となる．線分 (a, a') と (b, b') とは互いにかさなる部分がないから，点 a' は点 b' より上にあるか，それとも極端な場合には，a' は b' に一致する(実際には一致するのであるが，その証明はやや複雑である)．いずれにしても，線分 $[a', b']$ は少なくとも1点 p_0 を含む．p_0 を始点とする軌道 $\varphi(t, p_0)$ は点 O に漸近的に近づく．

軌道 $\varphi(t, p_0)$ 上の点 (x, y) における接線の方向係数は

$$k(x, y)=\frac{\mu y+s(x, y)}{\lambda x+r(x, y)}$$

に等しい．軌道 $\varphi(t, p_0)$ 上の点 (x, y) は三角形 $[O, a, b]$ に属しているから

$$|y|<\alpha x^2 \quad (0<x<\varepsilon) \tag{10}$$

が成り立つ．ゆえに $k(x, y)$ は有限で $x\to 0$ のとき 0 に近づく．他方，軌道 $\varphi(t, p_0)$ 上の点 (x, y) と点 O とを結ぶ線分の方向係数 $l(x, y)$ は $\dfrac{y}{x}$ に等しく，不等式 (10) によって $x\to 0$ のとき $l(x, y)\to 0$ となる．以上より，点 O に近づく曲線 $\varphi(t, p_0)$ は点 O において連続な導関数をもち，かつ横軸に接することがわかる．この軌道 $\varphi(t, p_0)$ が接触線 U_1 にほかならない．横軸の負の部分から点 O に近づくような接触線 U_2 もまた点 O において横軸に接する．この 2 本の接触線は，方程式

$$y=u(x) \tag{11}$$

によってあらわされる 1 つの曲線 U をなす．$u(x)$ は連続微分可能な関数で $u'(0)=0$ である．

これで，安定接触線 U_1, U_2 が存在すること，およびこれらに点 O をつけ加えるとなめらかな曲線 $U: y=u(x)$ がえられることが証明された．つぎに，接触線の一意性を証明しよう．それには，(x, y)-平面の原点の近傍において，曲線 (11) が横軸になるように座標変換をおこなう．すなわち，未知関数 y のかわりにあたらしい未知関数 z を

$$y=u(x)+z \tag{12}$$

によって導入すればよい．系 (7) に変換 (12) をおこなえば，x, z を未知関数とするあたらしい方程式系

$$\begin{cases} \dot{x}=f(x, u(x)+z)=F(x, z), \\ \dot{z}=g(x, u(x)+z)-u'(x)f(x, u(x)+z)=G(x, z) \end{cases} \tag{13}$$

がえられる．関数 $u(x)$ は連続な導関数をもつから，関数 $F(x, z)$ は変数 x, z に関して連続な偏導関数をもち，また関数 $G(x, z)$ は x に関して連続かつ z に関して連続な導関数をもつ．しかし，関数 $G(x, z)$ が x に関して連続な導関数をもつかどうかについてはなんともいえない．したがって系 (13) に対しては，一般に，右辺が未知変数に関して連続な偏導関数をもつという仮定が成り立っているとはいえない．しかし明らかに，系 (13) の各解には変換式 (12)

によって系（7）の解が対応し，また逆に，（7）の解には（13）の解が対応しているから，系（13）の軌道の行動をしらべることによって，系（7）の軌道の行動を知ることができる．

変換（12）によって系（7）の安定接触線 U_1, U_2 はそれぞれ (x,z)-平面の横軸の正の部分と負の部分の一部になるから，系（13）は恒等的に0に等しい関数 z と単調に0に近づくある関数 x とを解にもつ．したがって

$$G(x,0)\equiv 0.$$

あとで〔C〕において）関数 $G(x,z)$ は，変数 x,z の連続関数 $H(x,z)$ によって，つぎの形に書けることが証明される：

$$G(x,z)=zH(x,z). \tag{14}$$

関係式（14）と関数 $H(x,z)$ の連続性とによって，次式がえられる：

$$\left.\frac{\partial G(x,z)}{\partial z}\right|_{\substack{x=0\\z=0}}=\lim_{z\to 0}\frac{G(0,z)-G(0,0)}{z-0}=\lim_{z\to 0}\frac{G(0,z)}{z}=\lim_{z\to 0}H(0,z)=H(0,0).$$

ところが，系（7）と系（13）から $\left.\dfrac{\partial G(x,z)}{\partial z}\right|_{\substack{x=0\\z=0}}=\mu.$　ゆえに

$$H(0,0)=\mu$$

となる．けっきょく，系（13）の第2の方程式はつぎのようになる：

$$\dot{z}=zH(x,z).$$

ただし $H(x,z)$ は原点の近傍において μ に近い値をとり，したがって正である．このことから，原点の近傍では，接触線 U_1, U_2 と異なるどんな軌道にそっても，z 座標の符号は一定でかつ t が増大するときその絶対値も増大することがわかる．したがって，(x,z)-平面の横軸以外の軌道はどれも点 O に漸近的に近づくことはできない．これで，接触線 U_1, U_2 の一意性が証明された．すなわち，つぎのことがわかった：点 p_0 から出る系（7）の軌道が $t\to+\infty$ のとき点 O に漸近的に近づく接触線 U_1 となるような点 p_0 が開線分 (a,b) 上にただ1つ存在し，点 p が開線分 (a,p_0) 上にあれば，p を始点とする軌道は弧 Oa を横断し，また点 p が開線分 (b,p_0) 上にあれば，p を始点とする軌道は弧 Ob を横断する．

放物線

$$x-\alpha y^2=0, \qquad (15)$$

$$x+\alpha y^2=0, \qquad (16)$$

と直線

$$y=\varepsilon$$

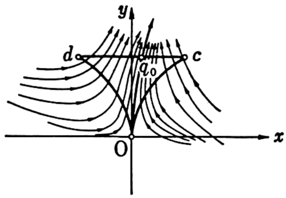


図　62

とを考えることによって，三角形 $[O, a, b]$ と同様な性質をもつ三角形 $[O, c, d]$ をつくることができる(図 62)．すなわち，点 q_0 から出る系（7）の軌道は $t\to-\infty$ のとき点 O に漸近的に近づく不安定接触線 V_1 となるような点 q_0 が開線分 (c, d) 上にただ1つ存在して，点 q が開線分 (c, q_0) 上にあれば，q を始点とする軌道は $t\to-\infty$ のとき弧 Oc を横断し，また点 q が開線分 (q_0, d) 上にあれば，q を始点とする軌道は $t\to-\infty$ のとき弧 Od を横断する．

つぎに，曲線

$$f(x, y)=0 \qquad (17)$$

を考えよう((7) を見よ)．容易にわかるように，この曲線は点 O において縦軸に接する．関数 $f(x, y)$ は2回連続微分可能であるから，曲線 (17) は点 O において有限な曲率半径をもつ．したがって α を十分大きくえらび，ε を十分小さくえらべば，$|y|\leqq\varepsilon$ の範囲では曲線 (17) が放物線 (15) と (16) との間をとおるようにすることができる(図 63)．曲線 (17) の右側では関数 $f(x, y)$ は負であるから，曲線 (17) の右側の点における相速度ベクトルは左を向いている．点 c から縦軸に平

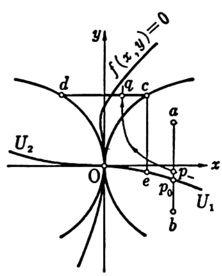


図　63

行線をひき，接触線 U_1 との交点を e として，閉線分 $[c, e]$ をつくろう．いま p を開線分 (a, p_0) の点とする．点 p が点 p_0 に十分近ければ，解が初期値に関して連続なことを主張する定理(定理14および§23の E])により，p を始点とする軌道は原点の十分近くをとおるから閉線分 $[c, e]$ を横断する，その後，この軌道は必らず弧 Oc を横断する．実際，もし軌道が曲線(17)を横断するならば，この軌

道はそれ以前に必らず弧 Oc を横断するはずである．またもし軌道が曲線 (17) を横断しないならば，この軌道上の動点は左の方に動きかつ動点と曲線 (11) との距離（垂線の長さ）z は増大する．したがって，この場合にも軌道は弧 Oc を横断する．ゆえに，いま考えている軌道は三角形 $[O, c, d]$ の中に入る．その後，

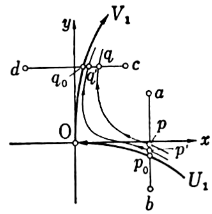


図 64

この軌道は開線分 (c, q_0) をある1点 q において必らず横断する．逆に，開線分 (c, q_0) 上の点 q' をとおる軌道は，q' と q_0 とが十分近ければ，$t \to -\infty$ のとき原点の近くをとおって開線分 (a, p_0) をある1点 p' において横断する（図 64）．以上のことから，けっきょく，$p \to p_0$ のとき $q \to q_0$ となることがわかった．これで鞍形点の近傍における軌道の行動が記述された．以上で，定理 22 が証明された．

さて，ここで関数 $G(x, z)$ の性質 (14) を証明しよう．

C〕 $G(x, z)$ は $x=z=0$ の近傍で定義された連続関数でかつ連続な偏導関数 $\dfrac{\partial}{\partial z}G(x, z)$ をもつものとする．もし

$$G(x, 0) \equiv 0$$

であれば，ある連続関数 $H(x, z)$ によって

$$G(x, z) = zH(x, z)$$

と書ける．

これを証明するため，関数 $H(x, z)$ を

$$\left.\begin{aligned} H(x, z) &= \frac{G(x, z)}{z}, \quad z \neq 0 \text{ のとき} \\ H(x, z) &= \frac{\partial}{\partial z}G(x, z), \quad z=0 \text{ のとき} \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

と定義するとき，$H(x, z)$ が連続なことをしめそう．$z \neq 0$ の場合には，(18) によって定義された関数 $H(x, z)$ は明らかに連続である．つぎに $H(x, z)$ が点 $(x_0, 0)$ においても連続であることを証明する．

$$G(x, z) = G(x, z) - G(x, 0) = z\frac{\partial}{\partial z}G(x, \theta z) \quad (0 < \theta < 1)$$

であり，関数 $\dfrac{\partial}{\partial z}G(x,z)$ は連続であるから，$x\to x_0$，$z\to 0$（$z\neq 0$）のとき $\dfrac{G(x,z)}{z}=\dfrac{\partial}{\partial z}G(x,\theta z)\to\dfrac{\partial}{\partial z}G(x_0,0)$ となる．これで C] が証明された．

結節点と渦状点の近傍における軌道の状態

結節点および渦状点に関する考察は鞍形点の場合よりもはるかに簡単である．その際，安定な場合だけを考えれば十分である．というのは，不安定な結節点と渦状点は，t の符号を変えることによって安定な結節点と渦状点になるからである．結節点と渦状点に関する研究の基本的な方法は極座標の導入である．

定理 23. 『$O=(0,0)$ を固有値 λ，μ（$\mu<\lambda<0$ とする）をもつ系（1）の安定結節点とする．固有値 λ に対応する固有ベクトルと同じ方向に点 O をとおる直線 P をひき，固有値 μ に対応する固有ベクトルと同じ方向に点 O をとおる直線 Q をひく．このとき，点 O に十分近い点を始点とする（1）の軌道はいずれも O に漸近的に近づき，かつ点 O において接線をもつ．また，点 O において直線 Q に接するような軌道がちょうど2つ存在し，それらは直線 Q に関して互いに反対側から点 O に近づく．その他の軌道はすべて直線 P に接する．不安定結節点（$0<\lambda<\mu$）の近傍における軌道の行動は，$t\to-\infty$ とすれば安定な場合と同様になる』

証明　系（1）の右辺は3回連続微分可能であると仮定して証明する．B] によって，系（1）は（5）の形に書ける．変数 ξ，η をあらためて x，y であらわせば，方程式系は

$$\begin{cases}\dot{x}=f(x,y)=\lambda x+r(x,y),\\ \dot{y}=g(x,y)=\mu y+s(x,y),\end{cases}\tag{19}$$

となる．ただし関数 $r(x,y)$，$s(x,y)$ は3回連続微分可能で，x，y に関するその1階導関数とともに点 O において 0 になる．

ここで極座標を導入する．すなわち

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi\tag{20}$$

とおく．(20) を微分して，それらを系 (19) に代入すれば，次式がえられる：

$$\begin{cases}\dot{\rho}\cos\varphi-\rho\dot{\varphi}\sin\varphi=\lambda\rho\cos\varphi+r(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi),\\ \dot{\rho}\sin\varphi+\rho\dot{\varphi}\cos\varphi=\mu\rho\sin\varphi+s(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi).\end{cases}$$

これを $\dot{\rho}$, $\rho\dot{\varphi}$ について解けば,

$$\begin{cases}\dot{\rho}=\rho(\lambda\cos^2\varphi+\mu\sin^2\varphi)+F(\rho,\varphi),\\ \rho\dot{\varphi}=(\mu-\lambda)\rho\sin\varphi\cos\varphi+G(\rho,\varphi),\end{cases}\tag{21}$$

がえられる．ここで,

$$F(\rho,\varphi)=\cos\varphi\cdot r(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)+\sin\varphi\cdot s(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi),$$

$$G(\rho,\varphi)=-\sin\varphi\cdot r(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)+\cos\varphi\cdot s(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi),$$

は φ に関して周期 2π の周期関数であり，ρ, φ に関して 3 回連続微分可能かつ ρ に関するその 1 階偏導関数とともに $\rho=0$ において 0 になる．すなわち

$$F(0,\varphi)=G(0,\varphi)=\frac{\partial F(0,\varphi)}{\partial\rho}=\frac{\partial G(0,\varphi)}{\partial\rho}=0.\tag{22}$$

あとで述べる **D**〕によって，関数 $G(\rho,\varphi)$ はつぎの形に書きあらわされる：

$$G(\rho,\varphi)=\rho H(\rho,\varphi).$$

ただし $H(\rho,\varphi)$ は ρ, φ に関して 2 回連続微分可能な関数で，$\rho=0$ のとき（任意の φ に対して）0 になる（(31), (22) を見よ）：

$$H(0,\varphi)=0.\tag{23}$$

したがって

$$\frac{\partial H(0,\varphi)}{\partial\varphi}=0.\tag{24}$$

関係式 (21) の第 2 式を ρ で割って

$$\begin{cases}\dot{\rho}=\rho(\lambda\cos^2\varphi+\mu\sin^2\varphi)+F(\rho,\varphi),\\ \dot{\varphi}=(\mu-\lambda)\sin\varphi\cos\varphi+H(\rho,\varphi),\end{cases}\tag{25}$$

がえられる．系 (25) を変数 ρ, φ の相平面において考察することにしよう．ただし φ を横軸，ρ を縦軸にとる．(x,y)–平面から (φ,ρ)–平面への変換 (20) は 1 対 1 ではないから，系 (19) と系 (25) とは決して同値ではない．しかし，系 (25) の軌道の行動から系 (19) の軌道の行動を知ることができる．以後，系 (25) の軌道の行動を帯状領域 $|\rho|<\varepsilon$ において考察する．

まず系 (25) の平衡点を求めよう．(25) の第 1 式からわかるように，十分

に小さい $\rho \fallingdotseq 0$ に対しては $\dot{\rho}$ は 0 と異なるから ((22) を見よ), 帯状領域 $|\rho|<\varepsilon$ の中にある平衡点はすべて横軸 $\rho=0$ 上にある. (25) の第 2 式と (23) とから, すべての平衡点

$$\rho=0, \quad \varphi=\frac{k\pi}{2} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots)$$

が求まる. (22), (24) に注意して, 系 (25) を点 $\rho=0$, $\varphi=\dfrac{k\pi}{2}$ において線形化すれば,

$$\begin{cases}\Delta\dot{\rho}=\mu_k\Delta\rho, \\ \Delta\dot{\varphi}=(\mu-\lambda)\cdot(-1)^k\Delta\varphi+\alpha_k\Delta\rho\end{cases}$$

となる. ただし μ_k は, k が偶数ならば λ, k が奇数ならば μ に等しい負数である. ゆえに点 $\rho=0$, $\varphi=\dfrac{k\pi}{2}$ は, k が偶数ならば系 (25) の安定結節点, k が奇数ならば鞍形点である(図 65). これらの鞍形点における不安定接触線は φ 軸の一部に一致し, 安定接触線は φ 軸の上と下から鞍形点に近づく曲線である(定理 22 を見よ).

つぎに $\varepsilon>0$ が十分に小さければ, 帯状領域 $|\rho|<\varepsilon$ のなかに始点をもつ系 (25) の解は, 系 (25) のある鞍形点に対する安定接触線であるか, または帯状領域 $|\rho|<\varepsilon$ から外に出ることなく系 (25) のある結節点に漸近的に近づく軌道であるかのいずれかであることを証明しよう.

各平衡点 $\rho=0$, $\varphi=\dfrac{k\pi}{2}$ に不等式 $|\rho|<\delta$, $\left|\varphi-\dfrac{k\pi}{2}\right|<\delta$ $(\delta>0)$ によって定められる近傍 U_k を対応させる. k が偶数ならばこの平衡点は安定結節点であるから, その漸近安定性によって, 正の数 δ が十分小さければ近傍 U_k 内に始点をもつ解はいずれも結節点に漸近的に近づく. k が奇数ならば対応する平衡点は鞍形点であるから, 正の数 δ が十分小さければ, U_k 内に始点をもつ平衡点以外の解は鞍形点の安定接触線であるか, または近傍 U_k の外に出てしまうかのいずれかであ

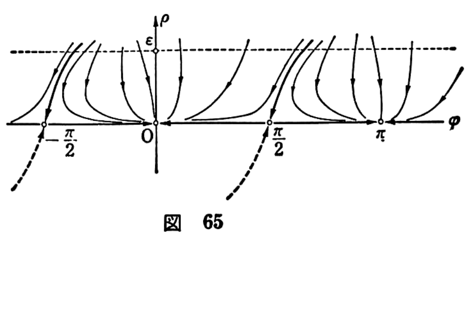


図 65

る(定理 22 を見よ)．系 (25) の右辺は φ の周期関数であるから，正の数 δ はすべての近傍 U_k に対して共通にとることができる．その上，十分小さい正の数 $\varepsilon \leqq \delta$ をとれば，帯状領域 $|\rho|<\varepsilon$ においては系 (25) の第1式の右辺と ρ とが互いに異符号になるようにすることができる．したがって，この帯状領域の中に始点をもついかなる解に対しても $|\rho|$ の値は減少する．さらに，固定された δ に対して十分に小さい正の数 ε をとれば，長方形

$$|\rho|<\varepsilon, \quad \frac{k\pi}{2}+\delta \leqq \varphi \leqq \frac{(k+1)\pi}{2}-\delta$$

においては系 (25) の第2式の右辺の符号は一定で，かつその絶対値がある正の数 α を越えるようにすることができる．ゆえに，この長方形内に始点をもつ軌道は $\dfrac{\pi}{2\alpha}$ を越えない時間内にこの長方形の外に出て，その後，安定結節点に対応するほうの近傍 U_k または U_{k+1} にはいっていく．系 (25) の φ に関する周期性によって，正の数 ε はいま考えているすべての長方形に対して同一にとられていると考えてよい．

けっきょく，帯状領域 $|\rho|<\varepsilon$ のなかに始点をもつ解は鞍形点の安定接触線であるか，または安定結節点に漸近的に近づく軌道であるかのいずれかであることがわかった．

帯状領域 $|\rho|<\varepsilon$ 内に始点をもつ系 (25) の解には，安定結節点 O を中心とする半径 ε の円内の点を始点とする系 (19) の解が対応する．系 (19) のこのような解を全部求めるには，系 (25) の解で領域 $0 \leqq \rho<\varepsilon$ 内に始点をもつものだけを考えればよい．系 (25) と変換 (20) とが φ に関して周期的なことから，半平面 $\rho>0$ 内にある系 (25) の安定接触線に対応する系 (19) の解は2つだけあって，この2つの解は互いに反対側から平衡点 O に漸近的に近づきかつ直線 Q に接する．また，系 (25) の安定結節点に近づく解に対応する系 (19) の解はいずれも，平衡点 O において直線 P に接する軌道となる．

これで定理 23 が証明された．

定理 24. 『系（1）の相平面の原点 O が渦状点，すなわち行列 (a_j^i) の固有値が互いに複素共役な2数

$$\lambda=\mu+i\nu, \quad \bar{\lambda}=\mu-i\nu \quad (\mu\neq 0,\ \nu\neq 0)$$

であると仮定する．このとき $\mu<0$ ならば，点 O の近くをとおる軌道はすべて $t\to+\infty$ のとき原点Oにラ線状にまきついていく．また $\mu>0$ ならば点 O の近くをとおる軌道はすべて $t\to-\infty$ のとき原点 O にラ線状にまきついていく』

証明 証明には標準形（6）を利用する．ただし，その変数 ξ,η を変数 x,y に書きかえておく．すなわち，方程式

$$\begin{cases}\dot{x}=f(x,y)=\mu x-\nu y+r(x,y),\\ \dot{y}=g(x,y)=\nu x+\mu y+s(x,y),\end{cases} \tag{26}$$

を考察する．極座標

$$\begin{cases}x=\rho\cos\varphi,\\ y=\rho\sin\varphi,\end{cases} \tag{27}$$

を導入しよう．(27) を微分してえられる式を系 (26) に代入すると，次式がえられる：

$$\begin{cases}\dot{\rho}\cos\varphi-\rho\dot{\varphi}\sin\varphi=\mu\rho\cos\varphi-\nu\rho\sin\varphi+r(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi),\\ \dot{\rho}\sin\varphi+\rho\dot{\varphi}\cos\varphi=\nu\rho\cos\varphi+\mu\rho\sin\varphi+s(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi).\end{cases}$$

この方程式系を $\dot{\rho},\dot{\varphi}$ について解けば，

$$\begin{cases}\dot{\rho}=\mu\rho+\rho^2\cdot p(\rho,\varphi),\\ \dot{\varphi}=\nu+\rho\cdot q(\rho,\varphi),\end{cases} \tag{28}$$

となる．ここで $p(\rho,\varphi)$, $q(\rho,\varphi)$ は $\rho=0$ の近傍では有界でかつφに関して周期 2π の周期関数である．議論を明確にするため $\mu<0$ と考えることにする．εを十分小さい正の数とし，$0<\rho_0<\varepsilon$ の場合に点 (ρ_0,φ_0) を始点とする系 (28) の軌道を考察しよう．(28) からわかるように，この軌道は φ 軸 $(\rho=0)$ に漸近的に近づく．この場合，ν が正であるか負であるかによって，$\varphi\to+\infty$ または $\varphi\to-\infty$ となる．以上より，対応する (x,y)-平面上の軌道は原点にラ線状にまきついていくことがわかる．

これで定理 24 が証明された．

つぎに述べる **D**」は，前に証明した **C**］の本質的な一般化である．

D〕 関数 $G(\rho,\varphi)$ は不等式 $|\rho|<\varepsilon$, $\beta_1<\varphi<\beta_2$ によって定められた領域 W において定義され，条件

$$G(0,\varphi)\equiv 0 \tag{29}$$

をみたし，かつ偏導関数

$$\frac{\partial G(\rho,\varphi)}{\partial\rho}$$

が存在して，この導関数は r 回連続偏微分可能であると仮定する．このとき，関数 $G(\rho,\varphi)$ は領域 W においてつぎの形に書きあらわされる：

$$G(\rho,\varphi)=\rho H(\rho,\varphi). \tag{30}$$

ただし関数 $H(\rho,\varphi)$ は，

$$\left.\begin{aligned} H(\rho,\varphi)&=\frac{G(\rho,\varphi)}{\rho},\quad \rho\neq 0 \text{ のとき}\\ H(0,\varphi)&=\frac{\partial G(0,\varphi)}{\partial\rho}\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

によって定義され，領域 W において r 回連続偏微分可能である（ここで $r=0$ とした場合が **C**〕にほかならない）．

D〕を証明するため，関数

$$K(\rho,\varphi)=\frac{\partial^{r-s}G(\rho,\varphi)}{\partial\varphi^{r-s}} \qquad (0\leqq s\leqq r) \tag{32}$$

を考えよう．この関数は領域 W において ρ に関して $s+1$ 回連続偏微分可能で，条件

$$K(0,\varphi)=0 \tag{33}$$

をみたす（(29) を見よ）．$\rho\neq 0$ の場合には

$$\frac{\partial^k}{\partial\rho^k}\left(\frac{K(\rho,\varphi)}{\rho}\right)=\sum_{i=0}^{k}\nu_i\frac{\partial^{k+1}K(\theta_i\rho,\varphi)}{\partial\rho^{k+1}} \qquad (0\leqq k\leqq s) \tag{34}$$

となることを証明しよう．ここに $\nu_0,\nu_1,\cdots\cdots,\nu_k$ は k には関係するが関数 $G(\rho,\varphi)$ には関係しない定数で，かつ条件

$$\nu_0+\nu_1+\cdots\cdots+\nu_k=\frac{1}{k+1} \tag{35}$$

をみたし，また $\theta_0,\theta_1,\cdots\cdots,\theta_k$ は不等式

$$0<\theta_i<1 \quad (i=0,1,\cdots\cdots,k) \tag{36}$$

をみたす数である．

導関数 $\dfrac{\partial^k}{\partial \rho^k}\left(\dfrac{K(\rho,\varphi)}{\rho}\right)$ をライプニッツ（Leibniz）の公式によって計算すれば，次式がえられる：

$$\frac{\partial^k}{\partial \rho^k}\left(\frac{1}{\rho}\cdot K(\rho,\varphi)\right)=\frac{1}{\rho^{k+1}}\sum_{i=0}^{k} a_i\rho^i\frac{\partial^i K(\rho,\varphi)}{\partial \rho^i}. \tag{37}$$

ここに $a_0, a_1, \cdots\cdots, a_k$ は k には関係するが関数 $G(\rho,\varphi)$ には関係しない定数である．関数 $\dfrac{\partial^i K(\rho,\varphi)}{\partial \rho^i}$ $(i=0,1,\cdots\cdots,k)$ を ρ についてテイラー（Taylor）級数に展開すれば，

$$\frac{\partial^i K(\rho,\varphi)}{\partial \rho^i}=\frac{\partial^i K(0,\varphi)}{\partial \rho^i}+\frac{\rho}{1!}\frac{\partial^{i+1}K(0,\varphi)}{\partial \rho^{i+1}}+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots+\frac{\rho^{k-i}}{(k-i)!}\cdot\frac{\partial^k K(0,\varphi)}{\partial \rho^k}+\frac{\rho^{k-i+1}}{(k-i+1)!}\cdot\frac{\partial^{k+1}K(\theta_i\rho,\varphi)}{\partial \rho^{k+1}} \tag{38}$$

となる．(38) を (37) に代入して，(33) に注意すれば

$$\frac{\partial^k}{\partial \rho^k}\left(\frac{K(\rho,\varphi)}{\rho}\right)=\frac{1}{\rho^{k+1}}\left[\sum_{i=1}^{k} b_i\rho^i\frac{\partial^i K(0,\varphi)}{\partial \rho^i}+\sum_{j=0}^{k}\nu_j\rho^{k+1}\frac{\partial^{k+1}K(\theta_j\rho,\varphi)}{\partial \rho^{k+1}}\right] \tag{39}$$

がえられる．ただし b_i, ν_j は（k には関係するが）関数 $G(\rho,\varphi)$ には依存しない定数である．

したがって関係式 (34) を証明するには，定数 $b_1, \cdots\cdots, b_k$ は 0 に等しく，定数 $\nu_0, \nu_1, \cdots\cdots, \nu_k$ は条件 (35) をみたすことをいえばよい．ところが，これらの定数は関数 $G(\rho,\varphi)$ に関係しないから，ある特別な形の関数 $G(\rho,\varphi)$ に対して上述の性質をしめせばよい．いま，$G(\rho,\varphi)$ が多項式

$$G(\rho,\varphi)=\frac{\varphi^{r-s}}{(r-s)!}\cdot\sum_{i=1}^{k+1}\frac{\alpha_i}{i!}\rho^i \tag{40}$$

の場合を考えてみよう．(32) によって，

$$\frac{\partial^k}{\partial \rho^k}\left(\frac{K(\rho,\varphi)}{\rho}\right)=\frac{\alpha_{k+1}}{k+1} \tag{41}$$

となることがわかる．他方，多項式 (40) に対して等式 (39) は

$$\frac{\partial^k}{\partial \rho^k}\left(\frac{K(\rho,\varphi)}{\rho}\right)=\frac{1}{\rho^{k+1}}\left[\sum_{i=1}^{k} b_i\rho^i\alpha_i+\alpha_{k+1}\rho^{k+1}\sum_{j=0}^{k}\nu_j\right] \tag{42}$$

となる．等式 (41)，(42) の右辺は $|\rho|<\varepsilon\ (\rho\neq 0)$ のとき一致しなければならない．ところが $\alpha_1, \cdots\cdots, \alpha_{k+1}$ は任意であるから，$b_1, \cdots\cdots, b_k$ が 0 に等しい

ことと関係式 (35) の成立がしめされる．これで公式 (34) が証明された．

さて，つぎのように定義された関数 $L_k(\rho,\varphi)$ $(k=0,1,\cdots\cdots,s)$ を考えよう．

$$\begin{cases} L_k(\rho,\varphi)=\dfrac{\partial^k}{\partial\rho^k}\left(\dfrac{K(\rho,\varphi)}{\rho}\right), & \rho\neq 0 \text{ のとき}, \\ L_k(0,\varphi)=\dfrac{1}{k+1}\,\dfrac{\partial^{k+1}K(0,\varphi)}{\partial\rho^{k+1}}. \end{cases} \tag{43}$$

等式 (34), (35) から，$L_k(\rho,\varphi)$ は領域 W 全体において変数 ρ,φ の連続関数であることがわかる．明らかに，$\rho\neq 0$ ならば，等式

$$L_{k+1}(\rho,\varphi)=\frac{\partial L_k(\rho,\varphi)}{\partial\rho}, \qquad k=0,\ 1,\cdots\cdots,s-1, \tag{44}$$

が成り立つ．この等式が $\rho=0$ の場合にも成り立つことを証明しよう．$0<\rho_0<\varepsilon$, $0<\rho<\varepsilon$ とすれば，

$$L_k(\rho,\varphi)=L_k(\rho_0,\varphi)+\int_{\rho_0}^{\rho}L_{k+1}(\xi,\varphi)d\xi \tag{45}$$

となる．この等式の両辺の関数は連続であるから，この等式は $\rho=0$ の場合にも成り立つ．すなわち

$$L_k(0,\varphi)=L_k(\rho_0,\varphi)+\int_{\rho_0}^{0}L_{k+1}(\xi,\varphi)d\xi. \tag{46}$$

(45) から (46) をひいてえられる式を ρ で割れば，

$$\frac{L_k(\rho,\varphi)-L_k(0,\varphi)}{\rho}=\frac{\int_0^{\rho}L_{k+1}(\xi,\varphi)d\xi}{\rho} \qquad (\rho>0)$$

となる． ここで $\rho\to 0$ と極限移行すれば，関数 $L_k(\rho,\varphi)$ の $\rho=0$ における右側微係数が存在してそれは $L_{k+1}(0,\varphi)$ に等しいことがわかる．まったく同様にして，左側微係数も $L_{k+1}(0,\varphi)$ に等しいことが証明される．以上より，等式 (44) は領域 W 全体において成り立つ．

関係式 (43), (32) において $k=0$, $s=r$ とすれば，等式 (30), (31) がえられ，また (44), (32) からは関数 $H(\rho,\varphi)$ が連続な偏導関数

$$\frac{\partial^{r-s+k}H(\rho,\varphi)}{\partial\rho^k\partial\varphi^{r-s}} \quad (0\leqq k\leqq s,\ 0\leqq s\leqq r)$$

をもつことがわかる．これは，関数 $H(\rho,\varphi)$ の r 階までの偏導関数がすべて連続であることをしめすものに他ならない．これで **D**] が証明された．

§31.　周期解の安定性

この§では自律系の周期解の安定性と，右辺が周期的な方程式系の安定性について考察する．

安定性の概念

すでに§26 において，自律系の平衡点に対してリャプーノフの意味での安定性の定義を与えたが，ここではまず，任意の方程式系の解に対してリャプーノフの意味での安定性の定義を与える．

任意の n 階正規方程式系をベクトルの記法によって

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) \tag{1}$$

とあらわし，この右辺は $(t,\boldsymbol{x})$-空間のある開集合 Γ で定義され，かつその偏導関数 $\dfrac{\partial f^i(t,\boldsymbol{x})}{\partial x^j}$ とともに Γ において連続であると仮定する．方程式（1）の解で初期値 $\theta,\boldsymbol{\xi}$ をもつものを $\boldsymbol{\varphi}(t,\theta,\boldsymbol{\xi})$ であらわそう．

定義　初期値 $t_0,\boldsymbol{x}_0$ をもつ方程式（1）の解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ が**リャプーノフの意味で安定**であるというのは，つぎの条件がみたされることである：1) 正の数 ρ が存在して $|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0|<\rho$ ならば，解 $\boldsymbol{\varphi}(t,\ t_0,\boldsymbol{x}_1)$ はすべての $t\geqq t_0$ に対して定義されている．ゆえに，もちろん解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 自体もすべての $t\geqq t_0$ に対して定義されている． 2) 正の数 ε に対して適当に正の数 $\delta\leqq\rho$ をえらべば，$|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0|<\delta$ のとき $t\geqq t_0$ に対して $|\boldsymbol{\varphi}(t,\ t_0,\boldsymbol{x}_1)-\boldsymbol{\varphi}(t)|<\varepsilon$ となる．リャプーノフの意味で安定な，方程式（1）の初期値 $t_0,\boldsymbol{x}_0$ の解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ が**漸近安定**であるというのは，3) 正の数 $\sigma\leqq\rho$ が存在して，$|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0|<\sigma$ ならば

$$t\to+\infty \text{ のとき } |\boldsymbol{\varphi}(t,t_0,\boldsymbol{x}_1)-\boldsymbol{\varphi}(t)|\to 0$$

となることである．

いま述べたリャプーノフの意味での安定性と漸近安定性の定義は，解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ の初期値 t_0，$\boldsymbol{x}_0$ には関係しないことが§23 の **E**] から容易にわかる．

とくに（1）が自律系であって解 $\varphi(t)$ が平衡点である場合には，上に述べた安定性の定義は §26 で述べたものと一致する．

以後，系（1）の右辺が t に関して周期 τ の周期関数：

$$\boldsymbol{f}(t+\tau, \boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) \tag{2}$$

の場合，および（1）が自律系：

$$\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{3}$$

の場合を考察する．上のいずれの場合にも，周期 τ の周期解：

$$\varphi(t+\tau)=\varphi(t) \tag{4}$$

の安定性について考える．ただし，自律系の場合には，$\varphi(t)$ は平衡点ではないと仮定する．まず，（1）が周期系（（2）を見よ）の場合に周期 τ の解（4）が漸近安定であるための十分条件を与える．自律系は周期系の特別の場合であるから，この十分条件は自律系の周期解に対しても利用できると考えたくなるが，じつは自律系はこの十分条件をみたさないことがわかる．自律系の周期解がリャプーノフの意味で安定であるための条件としては，もっと弱い別の条件が与えられている．

A］ 方程式（1）の解の行動を解 $\varphi(t)$ の近傍においてしらべるために，

$$\boldsymbol{x}=\varphi(t)+\boldsymbol{y} \tag{5}$$

とおいて，あたらしい未知ベクトル関数 $\boldsymbol{y}$ を導入しよう．以後，（1）の右辺は集合 Γ においてベクトル $\boldsymbol{x}$ の各成分に関して2回連続微分可能であると仮定する．（1）に変数変換（5）をほどこし，$\varphi(t)$ が（1）の解であることに注意して，右辺を $\boldsymbol{y}$ に関して展開すれば，

$$\dot{y}^i=\sum_j \frac{\partial f^i(t, \varphi(t))}{\partial x^j} y^j+r^i(t, \boldsymbol{y}) \tag{6}$$

となる．この方程式系を線形化すれば，すなわち $\boldsymbol{y}$ に関する2次の無限小の項 r^i を捨てされば，線形系

$$\dot{\boldsymbol{y}}=A(t)\boldsymbol{y} \tag{7}$$

がえられる．ただし行列 $A(t)$ の (i, j)–要素は

$$a_j^i(t)=\frac{\partial f^i(t, \varphi(t))}{\partial x^j}$$

である．ここで，方程式（1）の右辺は t に関して周期 τ の周期関数で（(2)を見よ)，解 $\varphi(t)$ も周期 τ の周期関数であると仮定しよう．そうすれば，線形系（7）は周期 τ の周期系：

$$a^i_j(t+\tau)=a^i_j(t), \quad i,\ j=1,\cdots\cdots,n,$$

になり，その特性数（§19 の E］を見よ）を考えることができる．（1）が自律系（(3）を見よ）であって，その周期解 $\varphi(t)$ が平衡点でなければ，線形系の特性数の1つは必らず1に等しいことがわかる．

この事実を証明しよう．行列 $\Psi(t)$ を，初期条件

$$\Psi(t_0)=E \tag{8}$$

をみたす行列方程式

$$\dot{\Psi}=A(t)\Psi$$

の解とし，C を解 $\Psi(t)$ に対する基礎行列（§19 の A］を見よ）とする．すなわち

$$\Psi(t+\tau)=\Psi(t)C \tag{9}$$

とする．すぐにわかるように，ベクトル方程式（7）の任意の解 $\phi(t)$ は

$$\phi(t)=\Psi(t)\phi(t_0)$$

と書ける．このことと関係式（8），（9）から

$$\phi(t_0+\tau)=C\phi(t_0) \tag{10}$$

となる．いま（1）が自律系（(3）を見よ）であるとすれば，

$$\dot{\varphi}(t)=f(\varphi(t))$$

であり，これを t について微分して

$$\ddot{\varphi}(t)=A(t)\dot{\varphi}(t)$$

がえられる．ゆえにベクトル関数 $\dot{\varphi}(t)$ はベクトル方程式（7）の解である．ところが，$\dot{\varphi}(t)$ は周期 τ の周期関数であるから，(10) より

$$\dot{\varphi}(t_0)=\dot{\varphi}(t_0+\tau)=C\dot{\varphi}(t_0) \tag{11}$$

となる．ここで $\dot{\varphi}(t_0)\neq 0$ であるから（$\varphi(t)$ は平衡点ではないから)，行列 C は固有値1をもつ．したがって，方程式（7）の特性数の1つは1に等しい．

リャプーノフとアンドロノーフ-ウィット*)の定理

さてここで，（1）が周期系の場合および自律系の場合に，周期解 $\varphi(t)$ が安定であるための十分条件を述べよう．

定理 25. 『方程式（1）を t に関して周期 τ の周期系とし（（2）を見よ），その周期解 $\varphi(t)$ の周期も同じく τ とする（（4）を見よ）．方程式（7）の特性数の絶対値がすべて1より小さい場合には，解 $\varphi(t)$ は漸近安定である．より正確にいうと，$\sigma>0$ が存在して，$|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0|<\sigma$ のときつぎの評価式が成り立つ：

$$|\varphi(t,t_0,\boldsymbol{x}_1)-\varphi(t)|<re^{-\alpha t}|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0| \quad (t\geqq t_0). \tag{12}$$

ここに r,α は $\boldsymbol{x}_1$ に無関係な正の定数である』

定理 26. 『（2）を自律方程式系（（3）を見よ），$\varphi(t)$ を（1）の平衡点ではない周期解とし，その周期を τ とする．方程式（7）の特性数1の重複度が1で，かつその他の特性数の絶対値はすべて1より小さいならば，解 $\varphi(t)$ はリャプーノフの意味で安定である』

定理 25 はリャプーノフによって得られたものである．定理 26 はアンドロノーフとウィットによって，リャプーノフのあるデリケートな定理から比較的簡単に系として得られたものである．ここでは，リャプーノフの方法にもとづく定理 26 の別証明を与える．

まず，定理 25, 26 を証明する際に必要となることがらを述べよう．

§26 では関数を自律方程式系にもとづいて微分するということを定義したが，ここでその概念を非自律系に対して拡張しよう．

B〕 $$F(\boldsymbol{x})=F(x^1,\cdots\cdots,x^n)$$

を変ベクトル $\boldsymbol{x}$ のスカラー関数とする．系（1）にもとづく $F(\boldsymbol{x})$ の点 $t_0,\boldsymbol{x}_0$ における微係数 $\dot{F}_{(1)}(t_0,\boldsymbol{x}_0)$ をつぎのように定義する． 初期値 $t_0,\boldsymbol{x}_0$ をもつ方程式（1）の解を $\varphi(t)$ とし，

$$\dot{F}_{(1)}(t_0,\boldsymbol{x}_0)=\frac{d}{dt}F(\varphi(t))\Big|_{t=t_0}$$

---

*) Andronoff-Witt.

とおく．上式の右辺を実際に微分すれば，

$$\dot{F}_{(1)}(t, \boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(\boldsymbol{x})}{\partial x^i} f^i(t, \boldsymbol{x})$$

となる．系（1）が自律系の場合には，点 t，$\boldsymbol{x}$ における（1）にもとづく $F(\boldsymbol{x})$ の導関数 $\dot{F}_{(1)}(t, \boldsymbol{x})$ は t に関係しない．

C〕 ベクトルの記法による正規形の微分方程式系：

$$\dot{\boldsymbol{z}} = B\boldsymbol{z} + \boldsymbol{p}(t, \boldsymbol{z}) \tag{13}$$

を考えよう．ここに $B=(b^i_j)$ は固有値がすべて負の実部をもつような定数行列，$\boldsymbol{p}(t,\boldsymbol{z})$ は $t \geqq t_0$，$|\boldsymbol{z}|<c$ $(c>0)$ において定義された関数で，つぎの評価式をみたすものとする：

$$|\boldsymbol{p}(t, \boldsymbol{z})| \leqq p|\boldsymbol{z}|^2 \quad (p \text{は正の定数}). \tag{14}$$

このとき，方程式 (13) の解 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{0}$ は漸近安定である．さらに，t_0，$\boldsymbol{z}_1$ $(|\boldsymbol{z}_1|<c_1<c)$ を初期値とする解 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{\chi}(t, \boldsymbol{z}_1)$ に対して，つぎの評価式が成り立つ：

$$|\boldsymbol{\chi}(t, \boldsymbol{z}_1)| \leqq r|\boldsymbol{z}_1|e^{-\alpha t} \quad (t \geqq t_0). \tag{15}$$

ここに r，α は $\boldsymbol{z}_1$ に無関係な正の数である．

この命題 C〕の証明はリャプーノフの定理（§26 を見よ）の証明とまったく同様であるから，つぎにその証明の要点だけを述べよう．

定係数の線形方程式系

$$\dot{\boldsymbol{z}} = B\boldsymbol{z} \tag{16}$$

に対するリャプーノフ関数（§26 の E〕を見よ）を $W(\boldsymbol{z})$ とすれば，不等式

$$\dot{W}_{(16)}(\boldsymbol{z}) = \sum_{i,j} \frac{\partial W(\boldsymbol{z})}{\partial z^i} b^i_j z^j \leqq -2\beta W(\boldsymbol{z}) \quad (\beta>0)$$

が成り立つ．この不等式と (14) とから，

$$W(\boldsymbol{z}) \leqq c_2 \quad (c_2 \text{はある正の数})$$

であるかぎり，

$$\dot{W}_{(13)}(t, \boldsymbol{z}) = \sum_{i,j} \frac{\partial W(\boldsymbol{z})}{\partial z^i} b^i_j z^j + \sum_i \frac{\partial W(\boldsymbol{z})}{\partial z^i} p^i(t, \boldsymbol{z}) \leqq -2\alpha W(\boldsymbol{z}) \quad (\alpha<\beta)$$

となる．いま

$$w(t) = W(\boldsymbol{\chi}(t, \boldsymbol{z}_1)) \quad (\text{ただし } W(\boldsymbol{z}_1)<c_2)$$

とおけば，関数 $w(t)$ $(t \geqq t_0)$ は

$$w(t) \leqq c_2$$

をみたすかぎり，不等式

$$\dot{w}(t) \leqq -2\alpha w(t) \tag{17}$$

をみたす．(17) から，$w(t) \leqq c_2$ ならば関数 $w(t)$ は単調減少（正確にいえば非増加）である．ところが，最初の瞬間 $t=t_0$ のときには $w(t) < c_2$ となっているから，点 $\chi(t, z_1)$ は不等式 $W(z) \leqq c_2$ によって定められる閉集合 F の外に出ることはできない．ゆえに解 $\chi(t, z_1)$ はすべての $t \geqq t_0$ に対して定義され（§22 の B], C] をみよ）かつすべての $t \geqq t_0$ に対して不等式 (17) が成り立つ．いま $z_1 \neq 0$ とすれば，不等式 (17) からつぎの計算ができる：

$$\frac{\dot{w}(t)}{w(t)} \leqq -2\alpha,$$

これを積分して

$$\log w(t) - \log w(t_0) \leqq -2\alpha(t-t_0).$$

これより

$$w(t) \leqq w(t_0) e^{-2\alpha(t-t_0)},$$

すなわち

$$W(\chi(t, z_1)) \leqq W(z_1) e^{-2\alpha(t-t_0)}$$

がえられる．この式からただちに評価式 (15) がみちびかれる．これで C] が証明された．

定理 25 の証明

定理 12 で見たように，方程式 (7) は周期 2τ の実行列 $T(t)$ を係数とする変換

$$y = T(t)z \tag{18}$$

によって，実定数行列 B を係数とする方程式

$$\dot{z} = Bz$$

に変換された．方程式 $\dot{z}=Bz$ の解は行列 e^{tB} であるから (§19 の C] を見よ)，行列 $e^{2\tau B}$ はこの方程式の基礎行列になり，したがってまた，方程式 (7) の基礎行列でもある．定理 29 によれば行列 $e^{2\tau B}$ の固有値は $e^{2\tau\lambda}$（λ は行列 B

のすべての固有値を動く）であり，定理 25 の仮定より行列 $e^{2\tau B}$ の固有値の絶対値はすべて1より小であるから，$|e^{2\tau\lambda}|<1$ となる．ゆえに，行列 B の固有値はすべて負の実部をもつ．方程式（6）に変数変換 (18) をほどこして，（6）を (13) の形にすることができ，その解 $z=\chi(t, z_1)$ に対して評価式 (15) が成り立つ．この評価式と行列 $T(t)$ が退化しないということから評価式 (12) がえられる．これで定理 25 が証明された．

定理 26 の証明

方程式（7）は重複度1の特性数1をもち，他の特性数の絶対値はすべて1よりも小であると仮定すれば，方程式（7）は周期 2τ の実行列 $T(t)$ を係数とする変換

$$y=T(t)z \tag{19}$$

によって，定数行列 B を係数とする方程式

$$\dot{z}=Bz \tag{20}$$

に変換されることを証明しよう．ただし B は

$$B=\left(\begin{array}{c|c} B^* & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \tag{21}$$

の形の行列で，B^* は固有値がすべて負の実部をもつような $n-1$ 次の正方行列である．

行列方程式

$$\dot{Y}=A(t)Y \tag{22}$$

（（7）を見よ）の1つの解の基礎行列を C とすれば，C は重複度1の固有値1をもつから，基底を適当にとることによって，C は

$$\left(\begin{array}{c|c} C^* & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \tag{23}$$

の形になる．ただし，C^* は固有値の絶対値がすべて1より小であるような $n-1$ 次の実正方行列である（§34 の G]，H] を見よ）．行列 (23) は行列 C に相似であるから，行列 (23) は方程式 (22) のある解の基礎行列である．いま，C は行列 (23) そのものであると考えよう．§35 の D] によれば，

$$e^{2\tau B^*}=C^{*2}$$

となるような実行列 B^* が存在し，定理 29 によって B^* の固有値はすべて負の実部をもつ．明らかに，行列 B ((21) を見よ) は条件

$$e^{2\tau B}=C^2$$

をみたす．ゆえに方程式 (7) を方程式 (20) に変換する変換 (19) が存在する (定理 12 の証明とくらべて見よ)．

この変換の行列 $T(t)$ のみたすべき条件をしらべてみよう．関係式 (19) を微分すれば，

$$\dot{\boldsymbol{y}}=\dot{T}(t)\boldsymbol{z}+T(t)\dot{\boldsymbol{z}}=\dot{T}(t)\boldsymbol{z}+T(t)B\boldsymbol{z}$$

となる．上式の $\boldsymbol{z}$ に $\boldsymbol{z}=T^{-1}(t)\boldsymbol{y}$ を代入すると，

$$\dot{\boldsymbol{y}}=(\dot{T}(t)+T(t)B)T^{-1}(t)\boldsymbol{y}$$

となる．この方程式は方程式 (7) に一致するはずであるから，

$$(\dot{T}(t)+T(t)B)T^{-1}(t)=A(t)$$

となる．この関係式の右側から行列 $T(t)$ をかければ，

$$\dot{T}(t)+T(t)B=A(t)T(t) \tag{24}$$

がえられる．行列 $T(t)$ に対するこの条件は，方程式 (7) が変換 (19) によって方程式 (20) に変換されるための必要十分条件である．さて，行列 $T(t)$ を最初の $n-1$ 列からなる n 行 $n-1$ 列の行列 $T^*(t)$ と第 n 列のベクトル $\boldsymbol{t}(t)$ $(\neq\boldsymbol{0})$ とにわけて，

$$T(t)=(T^*(t),\boldsymbol{t}(t))$$

と書くことにしよう．そのとき (24) は，(21) によって

$$\dot{T}^*(t)+T^*(t)B^*=A(t)T^*(t), \tag{25}$$

$$\dot{\boldsymbol{t}}(t)=A(t)\boldsymbol{t}(t), \tag{26}$$

となる．第 2 式からわかるように，$\boldsymbol{t}(t)$ は方程式 (7) の周期 2τ の周期解であるから ((10) を見よ)，

$$\boldsymbol{t}(t_0)=\boldsymbol{t}(t_0+2\tau)=C^2\boldsymbol{t}(t_0)$$

が成り立つ．ゆえに，ベクトル $\boldsymbol{t}(t_0)$ は行列 C^2 の固有値 1 に対応する固有ベクトルである．行列

$$C^2=\left(\begin{array}{c|c} C^{*2} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

の固有値1の重複度は1で，ベクトル $\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t_0)\neq 0$ も行列 C^2 の固有値1に対応する固有ベクトルの1つであるから（(11) を見よ），

$$\boldsymbol{t}(t_0)=\nu\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t_0)$$

となり，$\boldsymbol{t}(t)$, $\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t)$ はいずれも方程式（7）の解であるから

$$\boldsymbol{t}(t)=\nu\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t)$$

となる．このことからわかるように，行列 $T(t)$ の第 n 列 $\boldsymbol{t}(t)$ をベクトル $\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t)$ でおきかえてえられる行列（$T^*(t), \dot{\boldsymbol{\varphi}}(t)$）は条件 (25)，(26) をみたす．したがって

$$T(t)=(T^*(t), \dot{\boldsymbol{\varphi}}(t)) \tag{27}$$

とすることができる．

(25)，(27) から出発して，(1)が自律系の場合に（(3) を見よ）未知関数 $\boldsymbol{x}$ をあたらしい未知関数 $\boldsymbol{z}^*, s$ に変換しよう．ここに $\boldsymbol{z}^*=(z^1, \cdots\cdots, z^{n-1})$ は $n-1$ 次元のベクトルで（以後これを1列だけからなる行列と考える），s はあたらしいスカラー変数である．

$$\boldsymbol{x}=T^*(s)\boldsymbol{z}^*+\boldsymbol{\varphi}(s)=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z}^*, s) \tag{28}$$

とおけば，(28) は s に関して周期 2τ の周期的な変換になる．$|\boldsymbol{z}^*|$ が十分小さい場合には，変換 (28) によって各対 $\boldsymbol{z}^*, s$ には解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ のえがく閉軌道 K 上の点 $\boldsymbol{\varphi}(s)$ の近傍の点 $\boldsymbol{x}$ が対応する．点 $\boldsymbol{z}^*=0$, $s=s_0$ における写像 (28) の関数行列式は行列 $T(s_0)$ の行列式に等しいから（(27) を見よ）0 ではない．ゆえに各対 $\boldsymbol{z}^*=0$, $s=s_0$ の近傍では写像 (28) は1対1である．対 $(\boldsymbol{z}^*, s)$ の座標 s は周期 2τ の周期座標であると考えよう，すなわち対 $(\boldsymbol{z}^*, s)$ と $(\boldsymbol{z}^*, s+2\tau)$ とを同一視する．$(0, s_0)$ と $(0, s_0+\tau)$ とは変換 (28) によって軌道 K 上の同じ点 $\boldsymbol{\varphi}(s_0)$ にうつされるから，$(0, s_0)$ および $(0, s_0+\tau)$ のある近傍は K 上の点 $\boldsymbol{\varphi}(s_0)$ の同一の近傍に1対1に写像される．したがって，写像 (28) は（$|\boldsymbol{z}^*|$ が十分小さい場合）対 $(\boldsymbol{z}^*, s)$ 全体の集合を曲線 K のある近傍の上へ2重に写す．とくに対 $(0, s)$, $0\leqq s\leqq 2\tau$, の全体からなる閉曲線

は曲線 K 上に2重に写される.

いま方程式（1）（(3)を見よ）の未知関数 $\boldsymbol{x}$ に変数変換 (28) をほどこせば，左辺は

$$\dot{\boldsymbol{x}}=T^{*\prime}(s)\boldsymbol{z}^*\dot{s}+T^*(s)\dot{\boldsymbol{z}}^*+\boldsymbol{\varphi}'(s)\dot{s} \tag{29}$$

となり，右辺は

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(s))+A(s)T^*(s)\boldsymbol{z}^*+R(s,\boldsymbol{z}^*) \tag{30}$$

となる．ただし $R(s,\boldsymbol{z}^*)$ は s に関して周期 2τ をもち，ベクトル $\boldsymbol{z}^*$ に関して2次の無限小である．(29) と (30) の右辺を等置すれば，つぎの式がえられる：

$$T^*(s)\dot{\boldsymbol{z}}^*+\boldsymbol{\varphi}'(s)\dot{s}+T^{*\prime}(s)\boldsymbol{z}^*\dot{s}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(s))+A(s)T^*(s)\boldsymbol{z}^*+R(s,\boldsymbol{z}^*).$$

行列 $A(s)T^*(s)$ を (25) 式でおきかえ，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(s))$ を $\boldsymbol{\varphi}'(s)$ でおきかえれば，

$$T^*(s)\dot{\boldsymbol{z}}^*+\boldsymbol{\varphi}'(s)\dot{s}+T^{*\prime}(s)\boldsymbol{z}^*\dot{s}=\boldsymbol{\varphi}'(s)+(T^{*\prime}(s)+T^*(s)B^*)\boldsymbol{z}^*+R(s,\boldsymbol{z}^*),$$

すなわち

$$T^*(s)(\dot{\boldsymbol{z}}^*-B^*\boldsymbol{z}^*)+(\boldsymbol{\varphi}'(s)+T^{*\prime}(s)\boldsymbol{z}^*)(\dot{s}-1)=R(s,\boldsymbol{z}^*) \tag{31}$$

となる．

ここで，あらたに補助的な変ベクトル $\boldsymbol{u}^*=(u^1,\cdots\cdots,u^{n-1})$ とスカラー変数 u^n とを導入しよう．n 次元の $(\boldsymbol{u}^*,u^n)=(u^1,u^2,\cdots\cdots,u^n)$-空間における（$s,\boldsymbol{z}^*$ をパラメータとする）1次変換 M をつぎのように定義しよう：

$$M(\boldsymbol{u}^*,u^n)=T^*(s)\boldsymbol{u}^*+(\boldsymbol{\varphi}'(s)+T^{*\prime}(s)\boldsymbol{z}^*)u^n.$$

$\boldsymbol{z}^*=0$ の場合には変換 M は変換 $T(s)$ にほかならないから，0 の近傍の $\boldsymbol{z}^*$ に対しては変換 M は退化しない．したがって，方程式

$$M(\boldsymbol{u}^*,u^n)=R(s,\boldsymbol{z}^*)$$

は（0 の近傍の $\boldsymbol{z}^*$ に対して）$\boldsymbol{u}^*$，u^n に関して一意的に解け，その解

$$\boldsymbol{u}^*=\boldsymbol{q}^*(s,\boldsymbol{z}^*),\quad u^n=q(s,\boldsymbol{z}^*)$$

は，s に関して周期 2τ をもち，$\boldsymbol{z}^*$ に関しては2次の無限小である．関係式 (31) は

$$M(\dot{\boldsymbol{z}}^*-B^*\boldsymbol{z}^*,\dot{s}-1)=R(s,\boldsymbol{z}^*)$$

と書きかえられるから，

$$\dot{\boldsymbol{z}}^* - B^*\boldsymbol{z}^* = \boldsymbol{q}^*(s, \boldsymbol{z}^*), \qquad \dot{s} - 1 = q(s, \boldsymbol{z}^*)$$

をうる．したがって方程式（1）は $(\boldsymbol{z}^*, s)$-空間においてつぎの形に書ける：

$$\dot{\boldsymbol{z}}^* = B^*\boldsymbol{z}^* + \boldsymbol{q}^*(s, \boldsymbol{z}^*), \tag{32}$$

$$\dot{s} = 1 + q(s, \boldsymbol{z}^*). \tag{33}$$

いま適当に正の数 ε をとれば，$|\boldsymbol{z}^*| < \varepsilon$ のとき $|q(s, \boldsymbol{z}^*)| < 1$ となるようにできる．そうすれば任意の解 $\boldsymbol{z}^* = \boldsymbol{z}^*(t)$, $s = s(t)$ に対して，独立変数 t のかわりに s をとることができて，方程式 (32), (33) はつぎのように書きかえられる：

$$\frac{d\boldsymbol{z}^*}{ds} = \frac{B^*\boldsymbol{z}^* + \boldsymbol{q}^*(s, \boldsymbol{z}^*)}{1 + q(s, \boldsymbol{z}^*)},$$

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{1 + q(s, \boldsymbol{z}^*)},$$

または

$$\frac{d\boldsymbol{z}^*}{ds} = B^*\boldsymbol{z}^* + \boldsymbol{k}^*(s, \boldsymbol{z}^*), \tag{34}$$

$$\frac{dt}{ds} = 1 + k(s, \boldsymbol{z}^*). \tag{35}$$

ここに $\boldsymbol{k}^*(s, \boldsymbol{z}^*)$, $k(s, \boldsymbol{z}^*)$ は s に関して周期 2τ をもち，$\boldsymbol{z}^*$ に関して2次の無限小である．

方程式系 (34), (35) では s が独立変数で，$\boldsymbol{z}^*, t$ は s の未知関数と考えられている．方程式 (34) は t を含んでいないから，これだけ別に解くことができる．したがって系 (32), (33) の初期値 $t_0, \boldsymbol{z}_1^*, s_1$ の解を求めるには，まず初期値 $\boldsymbol{z}_1^*, s_1$ をもつ方程式 (34) の解 $\boldsymbol{z}^*(s, \boldsymbol{z}_1^*, s_1)$ を求めればよい．C] によって，$|\boldsymbol{z}_1^*|$ が十分に小さければ $\boldsymbol{z}^*(s, \boldsymbol{z}_1^*, s_1)$ はすべての $s \geqq s_1$ に対して存在し，つぎの評価式をみたす：

$$|\boldsymbol{z}^*(s, \boldsymbol{z}_1^*, s_1)| \leqq r|\boldsymbol{z}_1^*|e^{-\alpha s}. \tag{36}$$

こうしてから，方程式 (35) の初期値 $t_0, \boldsymbol{z}_1^*, s_1$ の解を求めればよい．この解は明らかに次式によって与えられる：

$$t = t_0 + \int_{s_1}^{s} (1 + k(\sigma, \boldsymbol{z}^*(\sigma, \boldsymbol{z}_1^*, s_1)))d\sigma$$

$$= t_0 - s_1 + s + \int_{s_1}^{s} k(\sigma, \boldsymbol{z}^*(\sigma, \boldsymbol{z}_1^*, s_1))d\sigma. \tag{37}$$

$|z_1^*|$ が十分に小さければ (37) は s について解くことができて,

$$s=s(t, z_1^*, s_1) \tag{38}$$

となる. これを方程式 (34) の解 $z^*(s, z_1^*, s_1)$ に代入すれば,

$$z^*(t)=z^*(s(t, z_1^*, s_1), z_1^*, s_1) \tag{39}$$

となる. (38), (39) が系 (32), (33) の初期値 t_0, z_1^*, s_1 をもつ解になる. (37) からわかるように, $t \geqq t_0$ のとき

$$|s(t, z_1^*, s_1)-t| \leqq |s_1-t_0|+l|z_1^*|^2 \quad (l \text{ は正の定数}) \tag{40}$$

となる. とくに $z_1^*=0$, $s_1=t_0$ の場合には, 解 (38), (39) はつぎのようになる:

$$z^*(t)=0, \quad s(t)=t.$$

評価式 (36), (40) から, 系 (32), (33) のこの解はリャプーノフの意味で安定なことがわかる.

解 (38), (39) を変換式 (28) に代入することによって, 初期値 $t=t_0$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{g}(z_1^*, s_1)$ をもつ方程式 (1) の解 $\boldsymbol{x}=\varphi(t, \boldsymbol{x}_1)$ がえられる. 変換 (28) は $z^*=0$, $s=t_0$ の近傍において1対1の写像であるから, $|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0|$ が十分に小さければ, 初期値 $t_0, \boldsymbol{x}_1$ をもつ方程式 (1) の解 $\varphi(t, \boldsymbol{x}_1)$ は系 (32), (33) の1つの解 (38), (39) から上述の方法によってえられる. とくに解 $\boldsymbol{x}=\varphi(t)$ は $z^*=0$, $s\equiv t$ からえられる. 最後に, 解 $z^*=0$, $s\equiv t$ がリャプーノフの意味で安定なことから (写像 (28) の一様連続性によって), はじめの周期解 $\boldsymbol{x}=\varphi(t)$ がリャプーノフの意味で安定なことがみちびかれる.

これで定理 26 が証明された.

上に述べた結果を極限閉軌道に対して応用してみよう.

D] (1) が2階の自律系 ((3) を見よ):

$$\dot{x}^i=f^i(x^1, x^2)=f^i(\boldsymbol{x}), \qquad i=1, 2,$$

の場合を考えよう. $\boldsymbol{x}=\varphi(t)$ を周期 τ の周期解とする. この場合, 方程式 (7) は

$$\dot{y}^i=\frac{\partial f^i(\varphi(t))}{\partial x^1}y^1+\frac{\partial f^i(\varphi(t))}{\partial x^2}y^2, \qquad i=1, 2,$$

となる．A] によって，この系の特性数の1つは1である．もう1つの特性数を λ であらわせば，

$$\lambda=e^{\int_0^\tau\left(\frac{\partial f^1(\varphi(t))}{\partial x^1}+\frac{\partial f^2(\varphi(t))}{\partial x^2}\right)dt} \tag{41}$$

となることがわかる．ゆえに，もし

$$\int_0^\tau\left(\frac{\partial f^1(\varphi(t))}{\partial x^1}+\frac{\partial f^2(\varphi(t))}{\partial x^2}\right)dt<0$$

ならば，周期解 $\boldsymbol{x}=\varphi(t)$ はリャプーノフの意味で安定である．つぎの例からわかるように，周期解 $\boldsymbol{x}=\varphi(t)$ に対する後続関数（§28 を見よ）$\chi(u)$ で

$$\chi'(u_0)=\lambda \tag{42}$$

となるものが実際に存在する．したがって，$\lambda\neq 1$ の場合には周期解 $\boldsymbol{x}=\varphi(t)$ は強い極限閉軌道であって，$\lambda<1$ のときは安定，$\lambda>1$ のときは不安定である．

等式 (41) を証明しよう．方程式 $\dot{Y}=A(t)Y$ の解 $Y=\Psi(t)$（初期値 $\Psi(0)=E$）に対する基礎行列 C は等式

$$C=\Psi(\tau)$$

によって与えられ，リュービルの公式（§17 の G] を見よ）によって

$$\operatorname{Det}\Psi(\tau)=\operatorname{Det}\Psi(0)\cdot e^{\int_0^\tau S(t)dt}.$$

ここに $S(t)=a_1^1(t)+a_2^2(t)=\dfrac{\partial f^1(\varphi(t))}{\partial x^1}+\dfrac{\partial f^2(\varphi(t))}{\partial x^2}$．いまの場合，$C$ は2次の行列でその1つの固有値は1であり，もう1つの固有値は λ であるから，

$$\lambda=\operatorname{Det}C=e^{\int_0^\tau\left(\frac{\partial f^1(\varphi(t))}{\partial x^1}+\frac{\partial f^2(\varphi(t))}{\partial x^2}\right)dt}.$$

例

初期値 $t_0, \boldsymbol{x}_0$ をもつ自律系（1）（(3) を見よ）の解 $\varphi(t)$ を周期 τ の周期解とし，初期値 t_0, ξ をもつ解を $\varphi(t,\xi)$ であらわす．§28 でつくった後続関数と同様な関数を解 $\varphi(t)$ に対して構成しよう．しかしこんどは，それは $n-1$ 次元の $(u^1, \cdots\cdots, u^{n-1})$-空間からそれ自身の中への写像である．

いま，方程式

$$x=g(u);\quad u=(u^1,\cdots\cdots,u^{n-1}),\tag{43}$$

によって与えられる曲面と軌道 $\varphi(t)$ とがただ1点

$$x_0=\varphi(t_0,x_0)=g(u_0)\tag{44}$$

において接することなく交わっているとしよう．したがって，ベクトル

$$\dot{\varphi}(t_0),\ \frac{\partial g(u_0)}{\partial u^1},\cdots\cdots,\frac{\partial g(u_0)}{\partial u^{n-1}}\tag{45}$$

は1次独立である．$|u-u_0|$ が小さい場合に，軌道 $\varphi(t,g(u))$ と曲面 (43) との交点を $t_0+\tau$ の近くの t に対して求めてみよう．$g(v)$ をその交点とすれば，

$$\varphi(t,g(u))-g(v)=0\tag{46}$$

となる．$u=u_0$ のとき (46) は明らかに解

$$t=t_0+\tau;\quad v=u_0$$

をもつ ((4)，(44) を見よ)．u を独立変数，t, v を未知関数と考えれば，系 (46) の未知関数 t, v に関する関数行列式は $t=t_0+\tau$, $u=u_0$, $v=u_0$ において0にならないから (ベクトル (45) は1次独立であるから)，$|u-u_0|$ が十分小さければ，系 (46) は t,v について

$$t=t(u),\qquad v=\chi(u)$$

と解け，$t(u)$, $\chi(u)$ はそれぞれ $t_0+\tau$, u_0 の近傍に属する．$(u^1,\cdots\cdots,u^{n-1})$-空間からそれ自身の中への (十分に小さい $|u-u_0|$ に対して定義された) 写像 $\chi(u)$ を後続写像とよぶことにしよう．方程式

$$\chi(u)-u=0\tag{47}$$

の任意の解 $u=u_1$ には，自律系 (1) ((3) を見よ) の τ に近い値を周期とする周期解 $\varphi(t,g(u_1))$ が対応する．とくに解 $u=u_0$ には，はじめの周期解 $\varphi(t)=\varphi(t,g(u_0))$ が対応する．もし，関数行列

$$M=\left(\frac{\partial\chi^i(u_0)}{\partial u^j}\right)\quad(i,\ j=1,\cdots\cdots,n-1)$$

のどの固有値も1でなければ，方程式 (47) の解 $u=u_0$ は孤立解である．実際，方程式 (47) の関数行列は $u=u_0$ のとき

$$M-E^*\quad(E^*\text{ は } n-1 \text{ 次の単位行列})$$

となるが，この行列の行列式が0にならないための必要十分条件は行列 M が固有値1をもたないことである．

ここで，解 $\varphi(t)$ によってえがかれる軌道 K の近くをとおる周期軌道 K_1 は必らず，方程式 (47) の1つの根 u_1 によって $\varphi(t,g(u_1))$ とあらわされるかどうかを考えてみよう．平面の場合 $(n=2)$ にはたしかにそうであった．じつは，$n\geqq3$ の場合にはもはやそうはいかないのである．τ を解 $\varphi(t)$ の最小の周期とすれば，

$$\varphi(t_0+t)=\varphi(t_0)$$

となるのは $t=k\tau$ (k は整数) の場合にかぎる(§15のC] を見よ)．軌道 K_1 が軌道 K

の近くにあれば，K_1 が曲面 (43) と点 $g(u_1)$ において交わるような (u_0 に近い) u_1 が存在する．いま

$$u_2=\chi(u_1),\quad u_3=\chi(u_2),\cdots\cdots,u_{l+1}=\chi(u_l),\cdots\cdots$$

とおこう．K_1 は閉軌道であるから，上の列の中には u_1 と一致するものがある．それらのうち最初のものを u_{k+1} とすれば，軌道 K_1 は解 $\varphi(t,g(u_1))$ によってえがかれ，その周期の最小値は $k\tau$ に近い数である．そして，解 $\varphi(t,g(u_1))$ は軌道 $\varphi(t)$ の近くを k 回まわったのち，はじめの点にもどる．平面の場合には $k=1$ の場合しかおこらない．k を軌道 K_1 の重複度と名づけよう．重複度 2 の軌道を求めるには，方程式 (47) ではなく，方程式

$$\chi(\chi(u))-u=0$$

を解かねばならない．また重複度 3 の軌道を求めるには，方程式

$$\chi[\chi(\chi(u))]-u=0$$

を解かねばならない，…….関数 $\chi(\chi(u))$, $\chi[\chi(\chi(u))]$,…… を関数 $\chi(u)$ の反復関数といい，k 重の反復関数を $\chi^k(u)$ であらわす．解 $\varphi(t)$ の近くにあるすべての k 重周期解を求めるには，方程式

$$\chi^k(u)-u=0 \tag{48}$$

を解いた上で，その解の中から重複度が k より小さい解をすべて取りのぞけばよい．方程式 (47) の根 $u=u_0$ は任意の k に対してつねに方程式 (48) の根になっている．$u=u_0$ のとき (48) の左辺の関数行列は明らかに M^k-E^* に等しいから，方程式 (48) が u_0 の近くでただ 1 つの解 $u=u_0$ をもつための十分条件は，行列 M^k-E^* の行列式が 0 にならないこと，すなわち行列 M^k が固有値 1 をもたないことである．これは，行列 M が固有値 $\sqrt[k]{1}$ をもたないことと同じである．したがって，与えられた重複度 k の周期軌道が軌道 K の近くに存在しないための十分条件は，行列 M が固有値 $\sqrt[k]{1}$ をもたないことである．とくに，行列 M の固有値の絶対値がすべて 1 よりも小さければ，M は $\sqrt[k]{1}$ を固有値とすることはできない．

上述の事実から，自律方程式系 (1) ((3) を見よ) の軌道で周期解 $\varphi(t)$ の近くにあるものを研究する場合，行列 M がいかに重要な役割をはたすかがわかるであろう．

つぎに，方程式 (7) が重複度 1 の特性数 1 をもつ場合には，適当な曲面 (43) をとれば，行列 M が行列 C^* ((23) を見よ) と一致するようにできることをしめそう．

$$\psi^i_j(t)=\left.\frac{\partial\varphi^i(t,\xi)}{\partial\xi^j}\right|_{\xi=x_0}\qquad \Psi(t)=(\psi^i_j(t))$$

とおけば，§ 24 の C] によって

$$\dot{\Psi}(t)=A(t)\Psi(t) \tag{49}$$

となり，かつ初期条件

$$\Psi(t_0)=E$$

をみたす．したがって行列 $\Psi(t)$ は行列方程式 (22) の解になる．ゆえに

$$\Psi(t_0+\tau)=C.$$

ところが，行列 C は重複度 1 の固有値 1 をもつから，ベクトル $\boldsymbol{y}$ の空間（A］を見よ）の基底を適当にとれば，Cを（23）の形にすることができる．いま，

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t_0)+\boldsymbol{y}$$

とおいて（(5) とくらべてみよ)，方程式 (1)（(3) を見よ）の相空間の座標としてベクトル $\boldsymbol{y}$ の成分をとることにしよう．こうしてえられる相空間の座標をあらためて x^1, ……, x^n であらわし，曲面（43）の方程式を

$$x^1=u^1, \cdots\cdots, , x^{n-1}=u^{n-1}, \quad x^n=0$$

とする．関係式（46）において $t=t(\boldsymbol{u})$, $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{u})$ を変数 $u^1, \cdots\cdots, u^{n-1}$ の関数と考え，(46) を $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$, $t=t_0+\tau$, $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ において $u^1, \cdots\cdots, u^{n-1}$ に関して微分すれば，等式

$$C^*=M \tag{50}$$

がえられる．

$n=2$ の場合には，行列 C^* はスカラー λ であって，(50) は等式（42）にほかならない．

行列 C^* の固有値の絶対値がすべて 1 より小さければ，軌道 K の近くにはいかなる重複度の周期解も存在しない．このことは評価式（36）からわかる．

補　章　I

解析学からの 2, 3 の準備

この補章では解析学のまったくちがった 2 つのことがらを 2 つの § にわけて述べる.

§ 32 では多次元の空間における連続性の概念に関連する基礎的なことがらを述べる. この § で重要なのは開集合の概念である. 私は, 微分方程式の右辺が開集合において与えられるということは本質的に重要なことだと思う. また, パラメータを含む解が開集合において存在すること（定理 13 を見よ）も本質的なことだと考える. したがって, 開集合とは何かということを正確に理解することは常微分方程式の解の存在定理を理解するためにどうしても必要なことである.

§ 33 では陰関数の存在定理とその応用をいくつか述べる. これら 2 つの § で述べられていることがらは, 解析学の教科書で必らずしも十分正確かつ完全に説明されてはいないので, 私はこれらのことがらをこの本に収めることにした.

§ 32.　ユークリッド空間の位相的性質

解析学では解析的な関係式の幾何学的表現またはいわゆる幾何学的翻訳が重要な役割を演じる. 幾何学的翻訳によって, 関係式と幾何学的対象とが関係づけられ, 幾何学的考察が問題の分析に役立つようになる. このような, 関係式と幾何学的対象との対応の典型的な例は解析幾何学において見られる. ふつうの意味では, 幾何学的対象となるものは平面上または 3 次元空間内のものであるが, 多変数を扱う解析学では多次元の空間においても幾何学的な言葉をもちいる. ここでは, われわれは多次元のユークリッド空間を同時にベクトル空間ともみなして考察することにする. 幾何学的対象のもっとも重要な幾何学的性質は位相的な性質である. ここでは, それらのうちでもっとも簡単なものにつ

いて考えることにしよう．

ユークリッド空間

まずはじめに，n 次元ユークリッドベクトル空間について述べよう．

A〕 n 個の実数からなる系列を **n 次元ベクトル**と名づける；これらの実数は**座標**（成分）とよばれる．座標は同じ文字の右肩に番号をつけて，たとえば $x^1, x^2, \cdots\cdots, x^n$ のようにしてあらわす；ベクトルそのものはやはり同じ文字で，ただし太文字で，あらわすことにする．いまの場合だとベクトルは $\boldsymbol{x}$ であらわされる．このことを

$$\boldsymbol{x}=(x^1, x^2, \cdots\cdots, x^n)$$

と書きあらわす．n 次元ベクトル全体の集合を **n 次元ベクトル空間**と名づけ，たとえば R であらわすことにする．2つのベクトル

$$\boldsymbol{x}=(x^1, x^2, \cdots\cdots, x^n), \quad \boldsymbol{y}=(y^1, y^2, \cdots\cdots, y^n)$$

の**和**および**差**を次式によって定義する：

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x^1+y^2, \cdots\cdots, x^n+y^n)\ ; \quad \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=(x^1-y^1, \cdots\cdots, x^n-y^n).$$

ベクトル $\boldsymbol{x}$ と実数 α との積は

$$\alpha\boldsymbol{x}=(\alpha x^1, \cdots\cdots, \alpha x^n)$$

で定義する．ベクトル空間において特別の役割をはたすのは，すべての座標が 0 であるような**零ベクトル 0** である．ユークリッドベクトル空間では上に述べた代数的な演算のほかに，2つのベクトルどうしの内積が定義される．すなわち，任意の 2 つのベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対してそれらの**内積**とよばれる数 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を次式によって定義する：

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=x^1y^1+\cdots\cdots+x^ny^n.$$

ベクトル $\boldsymbol{y}$ がベクトル $\boldsymbol{x}$ に等しい場合には**内積の意味での $\boldsymbol{x}$ の 2 乗** $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^2$ がえられる．これはつねに負ではなく，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の場合にかぎって 0 になる．ベクトル $\boldsymbol{x}$ の長さまたは絶対値 $|\boldsymbol{x}|$ を

$$|\boldsymbol{x}|=+\sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$$

によって定義する．以後，ベクトルをしばしばユークリッド空間 R の点とよぶことがある．2 点 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ との距離としてはベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ との差の絶対

値すなわち値 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$ を考える.

つぎに，ユークリッド空間における内積および距離に関して 2，3 の基本的な不等式を証明しよう．

B］ ユークリッド空間の任意の2つのベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して，つぎの不等式が成り立つ：

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2 \leqq \boldsymbol{x}^2\boldsymbol{y}^2, \tag{1}$$

$$|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}| \leqq |\boldsymbol{x}|+|\boldsymbol{y}|, \tag{2}$$

また，任意の3つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対して

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}| \leqq |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}| \tag{3}$$

となる.

第1の不等式を証明するために，任意の実数 α をとってベクトル $\alpha\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ を考え，これを内積の意味で2乗すれば

$$(\alpha\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^2=\alpha^2\boldsymbol{x}^2+2\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\boldsymbol{y}^2$$

となる. 内積の意味でのベクトルの2乗は負になりえないから，上式の右辺はどんな実数 α に対しても負にはならない. したがって，α を未知数と考えるとき，方程式

$$\alpha^2\boldsymbol{x}^2+2\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\boldsymbol{y}^2=0$$

は相異なる実根をもちえない. このことから，この2次方程式の判別式 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2-\boldsymbol{x}^2\boldsymbol{y}^2$ は正ではない. ゆえに不等式（1）が成り立つ.

不等式（2）を証明するにはその左辺を2乗する. そうすれば

$$|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^2=\boldsymbol{x}^2+2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\boldsymbol{y}^2$$

となり，不等式（1）によって

$$|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2 \leqq |\boldsymbol{x}|^2+2|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|+|\boldsymbol{y}|^2=(|\boldsymbol{x}|+|\boldsymbol{y}|)^2$$

となる. これよりただちに不等式（2）がえられる（$|\boldsymbol{x}|, |\boldsymbol{y}|$ がともに負ではないから).

最後に，不等式（3）を証明するには，不等式（2）において $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ とおけばよい.

これで B］が証明された.

ユークリッド空間の中の開集合，閉集合および有界集合

集合——いまの場合はユークリッド空間 R の中の集合——の和および交わりの定義を与えておこう．

$$M_1, M_2, \cdots\cdots, M_k \tag{4}$$

を空間 R の中の任意の集合の系とする．この系の少なくとも1つの集合に属する点 $\boldsymbol{x}$ の全体からなる集合を S であらわす．S を（4）の集合の**和**と定義する．つぎに，（4）のすべての集合に属する点 $\boldsymbol{x}$ の全体からなる集合を P であらわす．P を（4）の集合の**交わり**と定義する．

M を R の任意の集合とする．M に属さない R の点 $\boldsymbol{x}$ 全体からなる集合を D であらわす．D を M の**補集合**と名づける．明らかに，D の補集合は M である．

$$D_1, D_2, \cdots\cdots, D_k \tag{5}$$

を（4）の集合の補集合の系とする．すなわち，D_i は M_i の補集合である．容易にわかるように，**（4）の集合の和の補集合は（5）の集合の交わりであり**，逆に，**（4）の集合の交わりの補集合は（5）の集合の和である．**

さて，こんどはユークリッド空間の中の集合のごく簡単な位相的性質のいくつかを述べよう．これらの性質はほとんどユークリッド空間の中の開集合および閉集合の概念に関係するものである．

C〕 $\boldsymbol{a}$ をユークリッド空間 R の任意の点，$\boldsymbol{r}$ を任意の正の数とする．点 $\boldsymbol{a}$ からの距離が $\boldsymbol{r}$ よりも小であるような R の点全体の集合を $\boldsymbol{a}$ を中心とする半径 $\boldsymbol{r}$ の**球**と名づける．$\boldsymbol{a}$ を中心とする球をすべて点 $\boldsymbol{a}$ の**近傍**と名づける（あとで——例3において——近傍の概念が拡張される）．空間 R の中の集合 G が**開集合**であるというのは，G の任意の点 $\boldsymbol{a}$ のある近傍が G にすっかり含まれることである．M を R の中の任意の集合とする．R の点 $\boldsymbol{a}$ が集合 M の**極限点**であるというのは，$\boldsymbol{a}$ のどんな近傍も $\boldsymbol{a}$ と異なる M の点を含むことである．この場合，点 $\boldsymbol{a}$ のどんな近傍も M の点を無限に含む．R の中の集合 F が**閉集合**であるというのは，F の極限点がすべて F に属することである．任意の開集合の補集合は閉集合であり，任意の閉集合の補集合は開集合であるこ

とがわかる．上に述べたことがらを証明しよう．

まずはじめに，点 $\boldsymbol{a}$ の任意の近傍が $\boldsymbol{a}$ と異なる M の点を少なくとも 1 つ含めば，この近傍は M の点を無限に含むことを証明しよう．U_1 を点 $\boldsymbol{a}$ の任意の近傍とし，r_1 をその半径とする．$\boldsymbol{x}_1$ を，$\boldsymbol{a}$ と異なる M の点で U_1 に属するものとする．$\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{a}$ だから $|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{a}|=r_2>0$ である．$\boldsymbol{a}$ を中心とする半径 r_2 の球 U_2 は点 $\boldsymbol{x}_1$ を含まないが，$\boldsymbol{a}$ と異なる M のある点 $\boldsymbol{x}_2$ を含む．この手順を続けていけば，集合 M の互いに異なる点からなる無限列 $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, ……, $\boldsymbol{x}_k$, …… で U_1 に含まれているものがえられる．

つぎに，G を R の中の任意の開集合とし，F をその補集合とする．このとき，F が閉集合になることを証明しよう．$\boldsymbol{a}$ を集合 F の極限点とするとき，$\boldsymbol{a}$ が F に属すること，すなわち集合 G に属さないことをしめせばよい．いま仮りにそうでなかったとしよう．つまり $\boldsymbol{a}$ が G に属したとする．そうすれば，G が開集合であるという仮定から，点 $\boldsymbol{a}$ のある近傍は G にすっかり含まれる．したがって，この近傍は F の点をまったく含まない．これは $\boldsymbol{a}$ が F の極限点であるということに矛盾する．

こんどは，F を閉集合とし，その補集合 G は開集合であることを証明する．$\boldsymbol{a}$ を G の任意の点としよう．そうすれば，$\boldsymbol{a}$ は F に属さないから $\boldsymbol{a}$ は F の極限点ではありえない．ゆえに，$\boldsymbol{a}$ のある近傍は F の点をまったく含まない．したがって，この近傍は G にすっかり含まれる．これで G は開集合であることが証明された．

明らかに，ベクトル空間 R 自身は開集合かつ閉集合である．また，R の中の任意の<u>有限</u>集合 F は閉集合である．

ベクトル空間 R が 1 次元の場合には，この空間は実数全体の集合と一致し，ベクトルどうしの代数的演算は実数どうしの通常の演算になり，またベクトルの絶対値は対応する実数の絶対値に一致する．ただちにわかるように，実数全体のつくる空間において，固定された数 α に対して，不等式 $x<\alpha$ ($x>\alpha$) をみたす点 x 全体の集合は開集合である．この集合の補集合は不等式 $x\geqq\alpha$ ($x\leqq\alpha$) で定義され，閉集合である．

D] ユークリッド空間 R の中の有限個の開集合の和および交わりは開集合であり，R の中の有限個の閉集合の和および交わりは閉集合である[*]．

このことを証明しよう．

$$G_1, G_2, \cdots\cdots, G_k \tag{6}$$

を空間 R の中の有限個の開集合とする．これらの集合の和が開集合となることを証明しよう．$\boldsymbol{a}$ を和集合に属する任意の点とすれば，この点は（6）の少なくとも1つの集合たとえば G_i に属する．G_i は開集合であるから，点 $\boldsymbol{a}$ のある近傍は G_i にすっかり含まれる．そうすればこの近傍は（6）の集合の和にも含まれる．

つぎに，（6）の集合の交わりが開集合になることを証明しよう．$\boldsymbol{a}$ をこの交わりの任意の点とすれば，$\boldsymbol{a}$ は（6）の各集合 G_i に属する．G_i は開集合であるから，$\boldsymbol{a}$ を中心とするある半径 r_i の球は G_i に含まれる．$r_1, r_2, \cdots\cdots, r_k$ のうちの最小数を r とすれば，$\boldsymbol{a}$ を中心とする半径 r の球は（6）のどの集合にも含まれ，したがってまた（6）の集合の交わりにも含まれる．これで，（6）の集合の交わりは開集合であることがいえた．（6）の開集合の補集合を考えれば，閉集合の系に関する同様な結果がえられる（**C**］を見よ）．

E］ R をユークリッド空間とし，

$$\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2, \cdots\cdots, \boldsymbol{a}_k, \cdots\cdots \tag{7}$$

を R の点からなる無限列，M を R のある集合とする．点列が単なる集合とちがうのは，各点に番号がつけられているということだけでなく，異なる番号をつけられている点どうしが同一の点であってもよいことである．したがって，無限点列に属する点全体のつくる集合は点列そのものとは本質的に異なる；とくに，それは有限集合でありうる．点列（7）が有界であるというのは，ある数 r が存在して（7）のどんな点 $\boldsymbol{a}_k$ も不等式 $|\boldsymbol{a}_k|<r$ をみたすことである．まったく同様に，集合 M が有界であるというのは,ある数 r が存在して，M のどんな点 $\boldsymbol{x}$ に対しても不等式 $|\boldsymbol{x}|<r$ が成り立つことである．

[*] じつは，任意個数（必らずしも有限個とはかぎらない）の開集合の和は開集合であり，また任意個数の閉集合の交わりは閉集合であることが容易に証明されるが，われわれはこのことを使わない．

点列（7）が R の点 $\boldsymbol{a}$ に収束するというのは

$$\lim_{k\to\infty}|\boldsymbol{a}_k-\boldsymbol{a}|=0 \qquad (8)$$

となることである．この場合，もしも（7）が異なる点を無限に含んでいれば，点 $\boldsymbol{a}$ は点列（7）に属する点全体のつくる集合の極限点であり，しかもこの集合のただ１つの極限点である．また，有界な点列からは収束する部分点列がえらび出せる．このことから，有界な無限集合 M は極限点をもつことがわかる．

以上のことがらを証明しよう．点列（7）に属する点全体のつくる集合 A が無限集合でかつ（8）が成り立っているとしよう．等式（8）より，$\boldsymbol{a}$ を中心とするどんな球も，有限個を除いて点列（7）のすべての点を含むことがわかる．A は無限集合であるから，点 $\boldsymbol{a}$ のどんな近傍も A の点を無限に含む．したがって，点 $\boldsymbol{a}$ の近傍はいずれも $\boldsymbol{a}$ と異なる A の点を含む．ゆえに $\boldsymbol{a}$ は A の極限点である．つぎに $\boldsymbol{a}$ と異なる点 $\boldsymbol{b}$ は A の極限点になりえないことをしめそう．$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ との距離を 2ρ とする；$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$ であるから $\rho>0$．点 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ を中心とする半径 ρ の球 P,Q は交わらない．このことは不等式（3）から出る．上で見たように，球 P は有限個を除いて集合 A のすべての点を含むから，球 Q は集合 A の点をたかだか有限個しか含みえない．ゆえに $\boldsymbol{b}$ は A の極限点ではない．こんどは，点列（7）が有界であると仮定して，そこから収束する部分点列をえらび出そう．これの証明には数列に対してそれが可能なことを利用する．点列（7）の点を座標であらわし，

$$\boldsymbol{a}_k=(a_k^1, a_k^2, \cdots\cdots, a_k^n), \qquad k=1, 2, \cdots\cdots$$

とする．点列（7）は有界であるから，ある数 r に対して $|\boldsymbol{a}_k|<r$ $(k=1, 2, \cdots\cdots)$ となる．ゆえに

$$|a_k^i|<r, \qquad i=1, 2, \cdots\cdots, n\ ;\ k=1, 2, \cdots\cdots.$$

数列

$$a_1^1,\ a_2^1, \cdots\cdots, a_k^1, \cdots\cdots \qquad (9)$$

は有界であるから，これから収束する部分列が取り出せる．記号を変えないため，この部分列が数列（9）そのものであるとしよう．すなわち

$$\lim_{k\to\infty} a_k^1 = a^1$$

とする．ここに a^1 はある数である．こんどは，数列

$$a_1^2,\ a_2^2,\ \cdots\cdots,\ a_k^2,\ \cdots\cdots \tag{10}$$

から，その有界性によって，収束する部分列をえらび出せる．記号を変えないため，またもこの部分列が数列 (10) そのものであるとする．この方法を第 1, 第 2, ……, 第 n 座標まで続ければ，(7) の部分列

$$\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \cdots\cdots,\ \boldsymbol{b}_l,\ \cdots\cdots \tag{11}$$

で，この列の点の座標に対して等式

$$\lim_{l\to\infty} b_l^i = a^i, \qquad i=1, 2, \cdots\cdots, n, \tag{12}$$

が成り立つようなものがえらべる．ここに a^i はある数である．$\boldsymbol{a}=(a^1, \cdots\cdots, a^n)$ とおけば，(12) 式からただちに

$$\lim_{l\to\infty} |\boldsymbol{b}_l - \boldsymbol{a}| = 0$$

となる．けっきょく，点列 (7) から収束する部分列 (11) がえらび出せた．

最後に，有界な無限集合 M は極限点をもつことをしめそう．M は無限集合であるから，この中から互いに異なる点からなる無限点列

$$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots\cdots, \boldsymbol{a}_k, \cdots\cdots$$

がとれる．上で証明したことによって，この有界な点列からある点 $\boldsymbol{a}$ に収束する部分列

$$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots\cdots, \boldsymbol{b}_l, \cdots\cdots \tag{13}$$

が取り出せる．(13) に属する点はすべて互いに異なるから，点 $\boldsymbol{a}$ は点列 (13) の点全体のつくる集合の極限点であり，したがって M の極限点でもある．これで **E**] が証明された．

ある問題ではユークリッド空間の中の有界閉集合が重要な役割を演じる．このような集合の1つの特徴的な性質を証明しよう．これはコンパクト性とよばれているものである．

F] ユークリッド空間 R の部分集合 M が**コンパクト**であるというのは，

M の任意の無限部分集合が M に属する極限点をもつことである．M がコンパクトであるのは，M が有界な閉集合の場合であり，かつその場合にかぎる．

これを証明しよう．

はじめに，F を有界な閉集合と仮定し，M をその任意の無限部分集合とする．E] によって，集合 M はある極限点 $\boldsymbol{a}$ をもつ．この点は集合 F の極限点でもある．F は閉集合だから，点 $\boldsymbol{a}$ は F に属する．けっきょく，集合 F のどんな無限部分集合 M も必らず F に属する極限点をもつ．ゆえに F はコンパクトである．

こんどは，集合 F がコンパクトであると仮定する．まず F が有界な集合であることを証明しよう．仮りに有界でなかったとすると，F の中から

$$|\boldsymbol{a}_k|>k, \qquad k=1,2,\cdots\cdots$$

をみたす互いに異なる点からなる系列

$$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots\cdots, \boldsymbol{a}_k, \cdots\cdots \tag{14}$$

を取り出すことができる．$\boldsymbol{a}$ を R の任意の点としよう．不等式（2）によって $|\boldsymbol{a}_k|\leqq|\boldsymbol{a}_k-\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{a}|$ となるから

$$|\boldsymbol{a}_k-\boldsymbol{a}|\geqq k-|\boldsymbol{a}|$$

である．これは，点 $\boldsymbol{a}$ から点 $\boldsymbol{a}_k$ までの距離が k の増大にともなって限りなく大きくなることをしめしているから，点 $\boldsymbol{a}$ のどんな近傍も集合 (14) の点をたかだか有限個しか含まない．したがって，F の無限部分集合 (14) は極限点をもたない．これは F がコンパクトであることに矛盾する．

最後に，コンパクトな集合 F は閉集合であることを証明しよう．$\boldsymbol{c}$ を F の極限点であるとする．$\boldsymbol{c}$ のどんな近傍も $\boldsymbol{c}$ と異なる F の点を含むから，F の中から $\boldsymbol{c}$ に収束するような互いに異なる点からなる系列

$$\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \cdots\cdots, \boldsymbol{c}_l, \cdots\cdots \tag{15}$$

を取り出すことができる．E] によって，$\boldsymbol{c}$ は集合 (15) のただ 1 つの極限点である．ところが，F はコンパクトであるから，集合 (15) は F に属する極限点をもたねばならないから，点 $\boldsymbol{c}$ は F に属する．けっきょく，集合 F の任意の極限点 $\boldsymbol{c}$ が F に属するから，F は閉集合である．これで F] が証明された．

連続写像

A および B を任意の2つの集合とする．$\boldsymbol{f}$ が集合 A から集合 B の中への**写像**（または，集合 B の要素を値とする集合 A 上の関数）であるというのは，A の各点 $\boldsymbol{x}$ に集合 B の点 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ が対応させられていることである．C を A の部分集合とするとき，写像 $\boldsymbol{f}$ による C の像 $\boldsymbol{f}(C)$ というのは，点 $\boldsymbol{x}$ が C 全体を動くときの点 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 全体からなる集合のことである．D を B の部分集合とするとき，写像 $\boldsymbol{f}$ による D の原像 $\boldsymbol{f}^{-1}(D)$ というのは，点 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ が D に属するような A の点 $\boldsymbol{x}$ 全体の集合のことである．

G] R, S を2つのユークリッドベクトル空間とし，M を R の部分集合，$\boldsymbol{f}$ を集合 M から空間 S の中への写像とする．写像（関数と言っても同じことだが）$\boldsymbol{f}$ が集合 M の点 $\boldsymbol{a}$ **において連続**であるというのは，任意の正の数 ε に対して適当に正の数 δ を取れば，$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|<\delta$（ただし $\boldsymbol{x}$ は M の点）のとき $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})|<\varepsilon$ となることである．関数 $\boldsymbol{f}$ が集合 M 全体で連続であるというのは，$\boldsymbol{f}$ が M の各点において連続なことである．関数 $\boldsymbol{f}$ が**一様連続**であるというのは，任意の正の数 ε に対して適当に正の数 δ を取れば $|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|$（ただし $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は M の点）のとき $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)|<\varepsilon$ となることである．明らかに，一様連続な関数は連続である．

ベクトルの記法から成分ごとの記法に移ってみよう．いま

$$\boldsymbol{x}=(x^1, \cdots\cdots, x^p)\,;\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(f^1(\boldsymbol{x}), \cdots\cdots, f^q(\boldsymbol{x}))$$

とおく．ここに p, q はそれぞれユークリッド空間 R, S の次元である．そうすれば，変ベクトル $\boldsymbol{x}$ のベクトル関数 $\boldsymbol{f}$ から p 個のスカラー変数のスカラー関数が q 個えられる．すなわち

$$f^j(\boldsymbol{x})=f^j(x^1, \cdots\cdots, x^p), \qquad j=1, \cdots\cdots, q. \tag{16}$$

容易に証明できるように，変ベクトル $\boldsymbol{x}$ のベクトル関数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ が連続なことと (16) の関数が変数 $x^1, \cdots\cdots, x^p$ 全体に関して連続なこととは同等である．一様連続性についても同様である．ここではこの証明はしない．

H] R, S を2つのユークリッドベクトル空間，$\boldsymbol{f}$ を R のある開集合 G から空間 S の中への連続な写像とする．このとき，空間 S の任意の開集合 H

の原像 $\boldsymbol{f}^{-1}(H)$ は空間 R の開集合である．

これを証明しよう．H を S の任意の開集合とし，$\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{f}^{-1}(H)$ の点とする．H が開集合であることと，点 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ が H に属することとから，H に含まれるような $\boldsymbol{b}$ の近傍 V が存在する．V は $\boldsymbol{b}$ を中心とするある半径 ε の球である．写像 $\boldsymbol{f}$ の連続性から，適当な正の数 δ を取れば，$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|<\delta$（ただし $\boldsymbol{x}$ は G の点）のとき $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})|<\varepsilon$ となる．$\boldsymbol{a}$ は開集合 G の点であるから，$\boldsymbol{a}$ を中心とするある半径 $\boldsymbol{r}$ の球は G に含まれる．s を $\delta, \boldsymbol{r}$ のうちの小さい方だとすれば，$\boldsymbol{a}$ を中心とする半径 s の球は明らかに集合 $\boldsymbol{f}^{-1}(H)$ に含まれる．したがって $\boldsymbol{f}^{-1}(H)$ は開集合である．

I］ R, S を 2 つのユークリッドベクトル空間とし，F は R の有界な閉集合（すなわちコンパクト集合），$\boldsymbol{f}$ は F から空間 S の中への連続な写像とする．そうすれば，$\boldsymbol{f}$ は一様連続であって，集合 $\boldsymbol{f}(F)$ は有界な閉集合（すなわちコンパクト集合）である．後者より，とくに，コンパクト集合 F 上で定義された連続な実数値関数 f は最大値と最小値とをもつことがわかる．

まずはじめに，写像 $\boldsymbol{f}$ が一様連続なことを証明しよう．いま仮りにそうでなかったとする．そうすれば，ある正の数 ε に対しては，どんなに正の数 δ を取っても，$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|<\delta$ にもかかわらず $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})|\geqq\varepsilon$ となるような F の 2 点 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}$ が存在する．このことから，2 点の対の無限列

$$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{x}_1\ ;\ \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{x}_2\ ;\ \cdots\cdots\ ;\ \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{x}_k\ ;\ \cdots\cdots$$

で，つぎの条件をみたすものがつくれる：

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}_k)|\geqq\varepsilon, \qquad k=1,2,\cdots\cdots; \tag{17}$$

$$\lim_{k\to\infty}|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{a}_k|=0. \tag{18}$$

点列 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots\cdots, \boldsymbol{a}_k, \cdots\cdots$ は有界閉集合 F に含まれているから，これより F のある点 $\boldsymbol{a}$ に収束する部分列を取り出せる．記号を変えないため，点列 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots\cdots, \boldsymbol{a}_k, \cdots\cdots$ そのものが $\boldsymbol{a}$ に収束しているものとしよう．関数 $\boldsymbol{f}$ は点 $\boldsymbol{a}$ において連続であるから，適当に正の数 δ をとれば，$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|<\delta$ のとき $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ となる．点列 $\boldsymbol{a}_1, \cdots\cdots, \boldsymbol{a}_k, \cdots\cdots$ が $\boldsymbol{a}$ に収束することと (18) とから，十分に大きい番号 k をとれば $|\boldsymbol{a}_k-\boldsymbol{a}|<\delta$, $|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{a}|<\delta$ とな

る((3)を見よ). この k に対して

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}_k)| \leqq |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})|+|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}_k)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})|<2\cdot\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

となるが，これは不等式 (17) に矛盾する．

つぎに集合 $\boldsymbol{f}(F)$ がコンパクトであることを証明しよう．M を $\boldsymbol{f}(F)$ の無限部分集合とする．集合 M からは互いに異なる点からなる無限点列

$$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots\cdots, \boldsymbol{b}_k, \cdots\cdots \tag{19}$$

が取れる．$\boldsymbol{b}_k$ に対して $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}_k)=\boldsymbol{b}_k$ となるような F の点 $\boldsymbol{a}_k$ をとろう ($k=1, 2, \cdots\cdots$)．点 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots\cdots, \boldsymbol{a}_k, \cdots\cdots$ は互いに異なるから，集合 F に属する極限点 $\boldsymbol{a}$ をもつ．このとき，点 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ が集合 (19) の極限点になることをしめそう．V を点 $\boldsymbol{b}$ の任意の近傍すなわち $\boldsymbol{b}$ を中心とするある半径 $\varepsilon>0$ の球とする．関数 $\boldsymbol{f}$ は点 $\boldsymbol{a}$ において連続であるから，適当に正の数 δ を取れば，$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|<\delta$ ($\boldsymbol{x}$ は F の点) のとき $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})|<\varepsilon$ となる．点 $\boldsymbol{a}$ は無限集合 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots\cdots, \boldsymbol{a}_k, \cdots\cdots$ の極限点であるから，$\boldsymbol{a}$ を中心とする半径 δ の球 U の中には少なくとも 2 つの異なる点 $\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_l$ が含まれる．そうすれば，点 $\boldsymbol{b}_k, \boldsymbol{b}_l$ は球 V に属し，しかもこの 2 点は異なるから，そのうちの少なくとも 1 つは $\boldsymbol{b}$ ではない．したがって，点 $\boldsymbol{b}$ の任意の近傍 V は $\boldsymbol{b}$ と異なる (19) の点を少なくとも 1 つは含む．ゆえに，$\boldsymbol{b}$ は集合 (19) の極限点であり，当然 M の極限点でもある．これで $\boldsymbol{f}(F)$ はコンパクト集合であることがわかった．

空間 S が 1 次元の場合には，$\boldsymbol{f}=f$ は実数値関数であるから，$f(F)$ は実数の有界閉集合である．ゆえに集合 $f(F)$ の上限も下限も有限な値で，これらは $f(F)$ に属する．したがって，集合 $f(F)$ の上限が関数 f の最大値であり，下限が f の最小値である．これで I] が証明された．

例

連続関数のいくつかの例を考察しよう．

1. R, S を 2 つのユークリッド空間とする．空間 R の各点 $\boldsymbol{x}=(x^1, \cdots\cdots, x^p)$ に，次式によって定められる空間 S の点 $\boldsymbol{y}=(y^1, \cdots\cdots, y^q)$ を対応させよう：

$$y^j=\sum_{i=1}^{p} a_i^j x^i+b^j, \qquad j=1, \cdots\cdots, q. \tag{20}$$

ここに a_i^j は1つの行列 $A=(a_i^j)$ の要素で，b^j は1つのベクトル $\boldsymbol{b}=(b^1, \cdots\cdots, b^q)$ の要素とする．スカラーどうしの関係式 (20) はベクトルの記法をもちいて

$$\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b} \tag{21}$$

という形に書きあらわされる．この式は空間 R から空間 S の中へのいわゆるアフィン写像である．

アフィン写像は連続であることを証明しよう．簡単のため，この写像を $\boldsymbol{f}$ であらわすことにする．$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ を R の2点とし，$|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|<\delta$ とする．このとき空間 S の点 $\boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)$ と $\boldsymbol{y}_2=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)$ との距離を評価してみよう．

$$\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{y}_2=A(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)$$

であるから，この関係式を成分ごとに書きあらわせば，

$$y_1^j-y_2^j=\sum_{i=1}^{p} a_i^j(x_1^i-x_2^i), \qquad j=1, \cdots\cdots, q, \tag{22}$$

となる．γ を $|a_i^j|$ のうちの最大のものとすれば，すべての i, j に対して $|a_i^j|\leqq\gamma$ である．$|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|<\delta$ であるから $|x_1^i-x_2^i|<\delta$．ゆえに (22) より

$$|y_1^j-y_2^j|<p\gamma\delta, \qquad j=1, \cdots\cdots, q,$$

がえられる．この不等式を2乗して j について加え合わせてから開平すれば，$|\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{y}_2|<\delta p\gamma\sqrt{q}$ となる．したがって，不等式 $|\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{y}_2|<\varepsilon$ を成り立たせるには $\delta<\dfrac{\varepsilon}{p\gamma\sqrt{q}}$ と取れば十分である．アフィン写像は連続であるばかりでなく，一様連続なことがわかった．

前に証明したこと (H] を見よ) から，H を空間 S の開集合とすれば，アフィン写像 $\boldsymbol{f}$ による H の原像 $\boldsymbol{f}^{-1}(H)$ は空間 R の開集合である．

行列 A が正方行列（すなわち $p=q$）であって退化しない（すなわち A の行列式が 0 でない）場合には，方程式系 (20) は未知数 $x^1, \cdots\cdots, x^p$ について解けるから，ベクトル $\boldsymbol{x}$ はベクトル $\boldsymbol{y}$ によって一意的に

$$\boldsymbol{x}=C\boldsymbol{y}+\boldsymbol{d}$$

とあらわされる．このことは，アフィン写像 $\boldsymbol{f}$ はこの場合逆写像 $\boldsymbol{f}^{-1}$ をもち，それがまたアフィン写像であることをしめしている．ゆえに，空間 R の開集合は空間 S の開集合に写される．同じことが開集合の補集合すなわち閉集合についてもいえる　もしも空間 R から空間 S の上への退化しないアフィン写像を空間 R の中での座標変換と考えれば，二点間の距離は変わるが，位相的性質（集合が開集合であること，閉集合であること）は座標系の取りかたに依存しないことがわかる．

2.　R をユークリッド空間とし，$\boldsymbol{a}$ を R の $\boldsymbol{0}$ と異なるベクトルとする．R の各ベク

トル $\boldsymbol{x}$ に対して，次式で与えられる数 $y=f(\boldsymbol{x})$ を対応させよう：

$$y=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}).$$

関数 f は明らかに空間 R から実数の空間の中へのアフィン写像であるから，f は連続である．したがって，実数の開集合の f による原像は開集合である．不等式 $y<\alpha$ $(y>\alpha)$ をみたす実数 y 全体の集合は開集合である．この集合の空間 R での原像は不等式 $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{x})<\alpha$ $((\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})>\alpha)$ をみたす点 $\boldsymbol{x}$ の全体である．これらの不等式は，超平面 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})=\alpha$ によって分割される空間 R の2つの開半空間を定める．これらの開半空間補集合は不等式 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})\geqq\alpha$ $((\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})\leqq\alpha)$ で与えられる．これらの半空間は開集合の補集合であるから，閉集合である．

$\boldsymbol{a}_1,\cdots\cdots,\boldsymbol{a}_k$ をベクトルとし，$\alpha_1,\cdots\cdots,\alpha_k$ を実数とするとき，有限個の不等式

$$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{x})<\alpha_2,\cdots\cdots,(\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{x})<\alpha_k,$$

は空間 R の開凸多面体（一般に有界とはかぎらない）を定める．これは開集合である．なぜなら，これはいくつかの開半空間の交わりであるからである．まったく同様にして，有限個の不等式

$$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{x})\leqq\alpha_1,\cdots\cdots,(\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{x})\leqq\alpha_k$$

は空間 R の閉凸多面体を定める．これは閉集合である．実際，これは閉半空間の交わりとしてえられるからである．

3. R をユークリッド空間とし，L,M を R の部分集合とする．集合 L と M との距離というのは，点 $\boldsymbol{x}$ が L の中を勝手に動き，点 $\boldsymbol{y}$ が M の中を勝手に動くとき，数 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$ 全体の集合の下限のことである．集合 L がただ1点 $\boldsymbol{x}$ だけからなる場合には，点 $\boldsymbol{x}$ から集合 M までの距離 $f(\boldsymbol{x})$ は空間 R の点 $\boldsymbol{x}$ の関数である．

容易にわかるように，点 $\boldsymbol{x}$ から集合 M までの距離 $f(\boldsymbol{x})$ が0になるのは，点 $\boldsymbol{x}$ が集合 M に属するかまたは M の極限点である場合にかぎる．したがって，M が閉集合の場合には，$f(\boldsymbol{x})=0$ ならば $\boldsymbol{x}$ は M に属する．

点 $\boldsymbol{x}$ から集合 M までの距離 $f(\boldsymbol{x})$ は連続関数であることを証明しよう．$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ を R の2点とし，それらの距離が ε よりも小だとする：$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|<\varepsilon$．また $\boldsymbol{a}$ は M の任意の点とする．そうすれば，不等式（3）によって

$$f(\boldsymbol{x})\leqq|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|\leqq|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|+|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{a}|$$

となる．この不等式は集合 M の任意の点 $\boldsymbol{a}$ に対して成り立つのだから，右辺の第2項をその下限（点 $\boldsymbol{a}$ が M 全体を動くときの）でおきかえても不等式は成り立つ．すなわち

$$f(\boldsymbol{x})\leqq|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|+f(\boldsymbol{y})<\varepsilon+f(\boldsymbol{y})$$

ゆえに，$f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})<\varepsilon$．まったく同様にして $f(\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x})<\varepsilon$ が証明されるから，これら2つの不等式より；$|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})|<\varepsilon$ となる．けっきょく，不等式 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|<\varepsilon$ から $|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})|<\varepsilon$ がえられる．これは，関数 $f(\boldsymbol{x})$ が連続であるばかりでなく，一様連

続なことをしめしている.

点 $\boldsymbol{x}$ から集合 M までの距離 $f(\boldsymbol{x})$ は連続関数であるから，不等式 $f(\boldsymbol{x})<\alpha$ ($f(\boldsymbol{x})>\alpha$) は空間 R の開集合を定める (H] を見よ). この補集合は不等式 $f(\boldsymbol{x})\geqq\alpha$ ($f(\boldsymbol{x})\leqq\alpha$) で与えられる. したがって，これらの不等式によって定義される集合は閉集合である. とくに，不等式 $f(\boldsymbol{x})\leqq 0$ で定義される集合 $\bar{M}$ は閉集合である. $\bar{M}$ は M にそのすべての極限点をつけ加えてえられる集合で，M の閉包といわれる. M が有界な場合には，不等式 $f(\boldsymbol{x})\leqq\alpha$ で定義される集合は閉集合であるばかりでなく，容易にわかるように，有界でもある.

有界閉集合 F が閉集合 M と交わらない場合には，これらの集合の間の距離は正である. これを証明するため，点 $\boldsymbol{x}$ から集合 M までの距離をまえと同様に $f(\boldsymbol{x})$ であらわすことにしよう. $f(\boldsymbol{x})$ は連続であるから，有界閉集合 F の上で f は最小値 m を取る(I]を見よ). 容易にわかるように，m は集合 F と M との距離である. $m>0$ であることをしめそう. $\boldsymbol{a}$ を $f(\boldsymbol{a})=m$ であるような F の点とする. もしも $m=0$ であったとすると，M は閉集合であるから，点 $\boldsymbol{a}$ は M に属さねばならない. ところが F と M とは交わらないのであるから，これは矛盾である.

点 $\boldsymbol{x}$ から任意の集合 M までの距離 $f(\boldsymbol{x})$ は連続関数だから，とくに点 $\boldsymbol{x}$ から点 $\boldsymbol{a}$ までの距離 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|$ は $\boldsymbol{x}$ の連続関数である. このことから，どんな球も (C] を見よ) すべて開集合であることがわかる. C] では，点 $\boldsymbol{a}$ を中心とする任意の球を点 $\boldsymbol{a}$ の近傍と呼んだが，ときには $\boldsymbol{a}$ を含む任意の開集合を点 $\boldsymbol{a}$ の近傍とするほうが好都合なこともある. 近傍の概念をこのように拡げた場合の極限点の定義は前と同様である.

§ 33.　陰関数に関する定理

この § では，解析学でよく知られている陰関数の存在とその微分可能性に関する定理が証明される. これらの定理の応用範囲は広く，とくにこの本でも使われる. 陰関数の存在定理の証明は，§ 20 および § 21 で使われているのと同様な逐次近似法 (または縮小写像) によっておこない，陰関数の微分可能性の証明ではアダマールの補題をもちいる.

したがって，この § の内容は第 4 章でもちいた方法に密接な関係があり，またそれらの方法のよい適用例でもある.

$t^1, \cdots\cdots, t^k$ を独立変数と考えて，未知関数 $x^1, \cdots\cdots, x^n$ に関する方程式系

$$f^i(t^1, \cdots\cdots, t^k ; x^1, \cdots\cdots, x^n)=0, \qquad i=1, \cdots\cdots, n, \tag{1}$$

を考察しよう. 今後，方程式 (1) の左辺すなわち関数

$$f^i(t^1, \cdots\cdots, t^k\,;\, x^1, \cdots\cdots, x^n), \qquad i=1, \cdots\cdots, n, \tag{2}$$

は $(t^1, \cdots\cdots, t^k,\ x^1, \cdots\cdots, x^n)$-空間 R のある開集合 Γ において定義され，かつそこで，偏導関数

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j}, \qquad i, j=1, \cdots\cdots, n, \tag{3}$$

とともに連続であると仮定する.

$$\boldsymbol{t}=(t^1, \cdots\cdots, t^k);\ \ \boldsymbol{x}=(x^1, \cdots\cdots, x^n);$$
$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x})=(f^1(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}), \cdots\cdots, f^n(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}))$$

とおけば，方程式（1）はベクトルの記法によって

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x})=\boldsymbol{0} \tag{4}$$

と書ける.

$(t^1, \cdots\cdots, t^k)$-空間 T のある開集合 G で定義された変ベクトル $\boldsymbol{t}$ のベクトル値関数 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t})$ が方程式（4）の解であるというのは，等式

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t}))=\boldsymbol{0} \tag{5}$$

が開集合 G のすべての点 $\boldsymbol{t}$ において恒等的に成り立つことである.

定理 27.　『関数行列式

$$\left|\frac{\partial f^i(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x})}{\partial x^j}\right|$$

が開集合 Γ の各点 $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x})$ において 0 ではないと仮定する．そうすれば，条件

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{0} \tag{6}$$

をみたす開集合 Γ の任意の点 $(\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{x}_0)$ に対して，条件

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t}_0)=\boldsymbol{x}_0 \tag{7}$$

をみたすような方程式（4）の連続な解 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t})$ が一意的に存在する．すなわち，点 $(\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{x}_0)$ を含むような空間 R のある開集合 U が存在して，方程式（4）をみたすような U のどんな点 $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x})$ も方程式 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t})$ をみたす．言い換えれば，点 $(\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{x}_0)$ の近傍には方程式（4）はみたすが関数 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t})$ のグラフには属さないというような点は1つもない』

この定理の証明には変ベクトルのベクトル値関数列の一様収束性をもちいる．§20 および §21 ではスカラー変数の関数列だけを考えたので，ここで今度は

変ベクトルの関数の場合について，同じことを述べよう（§21 の C〕とくらべてみよ）．

A〕 F を空間 T の有界閉集合とする．集合 F の上で定義された連続なベクトル値関数 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t})$ のノルム $\|\boldsymbol{\varphi}\|$ というのは，F 上での $\boldsymbol{\varphi}$ の絶対値の最大値のことである．すなわち

$$\|\boldsymbol{\varphi}\|=\max_{t\in F}|\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t})|.$$

ノルムの概念をもちいて，集合 F 上で定義されたベクトル変数をもつ連続なベクトル関数の列

$$\boldsymbol{\varphi}_0, \boldsymbol{\varphi}_1, \cdots\cdots, \boldsymbol{\varphi}_i, \cdots\cdots \tag{8}$$

に対して，一様収束という概念が定義できる．すなわち，関数列（8）が同じ集合 F 上で定義された連続関数 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t})$ に一様収束するというのは

$$\lim_{i\to\infty}\|\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{\varphi}_i\|=0$$

となることである．関数列（8）がある連続関数に収束するためには，級数 $\sum_n a_n$ が収束するような数列 $a_0, a_1, \cdots\cdots, a_i, \cdots\cdots$ に対して不等式

$$\|\boldsymbol{\varphi}_{i+1}-\boldsymbol{\varphi}_i\|\leqq a_i$$

が成り立てば十分である．

定理 27 の証明．方程式（4）に逐次近似法を適用するため，この方程式をいくらか別の形に書きなおそう．そのため

$$b^i_j=\frac{\partial}{\partial x^j}f^i(\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{x}_0), \qquad i, j=1, \cdots\cdots, n, \tag{9}$$

とおく．関数行列式

$$\left|\frac{\partial f^i(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x})}{\partial x^j}\right|$$

は開集合 Γ の各点で 0 にならないから，行列 $B=(b^i_j)$ は逆行列 B^{-1} をもつ．いま，方程式系（1）を

$$\sum_j b^i_j x^j=\sum_j b^i_j x^j-f^i(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}), \qquad i=1, \cdots\cdots, n, \tag{10}$$

と書き変えて，この右辺を $h^i(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x})$ であらわせば，（9）によって，明らかに

$$\frac{\partial}{\partial x^j} h^i(\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{x}_0) = 0 \qquad i, j = 1, \cdots\cdots, n, \tag{11}$$

である．(10) をベクトルの記法をもちいてあらわせば

$$B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}) \tag{12}$$

となる．この等式に左から B^{-1} をほどこせば，同値な関係式

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}) \tag{13}$$

がえられる．ただし $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}) = (g^1(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}), \cdots\cdots, g^n(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x})) = B^{-1}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x})$.
(11) からわかるように，

$$\frac{\partial}{\partial x^j} g^i(\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{x}_0) = 0. \tag{14}$$

また，方程式 (13) と方程式 (4) とは同値であって，点 $(\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{x}_0)$ は (4) をみたしているから，この点は (13) をもみたす．すなわち

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}_0\,. \tag{15}$$

さて，条件 (14) および (15) をみたす方程式 (13) に逐次近似法を適用しようというのである．つまり，変ベクトル $\boldsymbol{t}$ の任意のベクトル関数 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{t})$ に，次式で定義されるベクトル関数 $\boldsymbol{\phi}^*(\boldsymbol{t})$ を対応させる：

$$\boldsymbol{\phi}^*(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{t})). \tag{16}$$

この対応関係を（作用素の記法をもちいて）

$$\boldsymbol{\phi}^* = A\boldsymbol{\phi} \tag{17}$$

と書くことにしよう．

つぎに，連続関数 $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{t})$ からなる1つの族 Ω をうまく定義して，Ω に属するどんな関数も作用素 A によって Ω の中の関数に写され，しかも A は Ω 上で縮小写像になるようにしよう．

2つの正の数 q, a を適当に取って，

$$|\boldsymbol{t} - \boldsymbol{t}_0| \leqq q, \quad |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| \leqq a \tag{18}$$

をみたす点 $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x})$ はすべて開集合 Γ に属し，かつ不等式

$$\left|\frac{\partial}{\partial x^j} g^i(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x})\right| \leqq \frac{k}{n^2}, \qquad i, j = 1, \cdots\cdots, n, \tag{19}$$

をみたすようにする．ただし k は不等式 $0 < k < 1$ をみたすある数である．

これが可能なことは，Γ が開集合で，偏導関数 $\dfrac{\partial g^i(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x})}{\partial x^j}$ は連続かつ点 ($\boldsymbol{t}_0$, $\boldsymbol{x}_0$) で 0 になるからである ((14) を見よ). §21 の不等式 (6) によれば，集合 (18) の任意の 2 点 $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x})$, $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{y})$ に対して

$$|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{y})| \leqq k|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| \tag{20}$$

が成り立つ ((19) とくらべてみよ). また，$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x})$ は連続であるから，十分小さい数 $r \leqq q$ をとって，

$$|\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t}_0|<r \quad \text{のとき} \quad |\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{x}_0)|<(1-k)a \tag{21}$$

とすることができる. 不等式 (20) で $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}_0$ とおけば，(20) と (21) とから ($|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0| \leqq a$, $|\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t}_0| \leqq r$ のとき)

$$|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x})-\boldsymbol{x}_0|=|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{x}_0)|$$
$$\leqq|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}_0)|+|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{x}_0)| \leqq k|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|+(1-k)a$$

がえられる. けっきょく，

$$|\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t}_0| \leqq r, \quad |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0| \leqq a \tag{22}$$

という条件のもとで，

$$|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x})-\boldsymbol{x}_0| \leqq a \tag{23}$$

となる. $r \leqq q$ であるから，集合 (22) の任意の 2 点 $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x})$, $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{y})$ に対して，不等式 (20) と (23) とがともに成り立つ.

いま，閉球 $|\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t}_0| \leqq r$ において定義された連続関数 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t})$ で，この閉球上で条件 $|\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t})-\boldsymbol{x}_0| \leqq a$ をみたすものの全体からなる集合を Ω としよう. 不等式 (23) からわかるように，Ω に属するどんな関数も作用素 A によって，やはり Ω に属する関数に写され，また，不等式 (20) から作用素 A は集合 Ω 上で縮小写像であることがわかる. すなわち，Ω の任意の 2 つの関数 $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}$ に対して，

$$\|A\boldsymbol{\psi}-A\boldsymbol{\varphi}\| \leqq k\|\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{\varphi}\|, \qquad 0<k<1.$$

このことから (155～156 ページを見よ)，集合 Ω の中に，条件

$$\boldsymbol{\varphi}=A\boldsymbol{\varphi} \tag{24}$$

をみたす関数 $\boldsymbol{\varphi}$ がただ 1 つ存在することがわかる. (24) は恒等式

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t})) \tag{25}$$

にほかならないが，これは恒等式（5）と同値である．

つぎに，点 $(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x})$ が集合 (22) に属しかつ方程式（4）(方程式 (13) といっても同じことであるが）をみたしていれば，この点 $(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x})$ は方程式

$$\boldsymbol{x}=\varphi(\boldsymbol{t}) \tag{26}$$

をもみたすことを証明しよう．

実際，(20) から

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t})|=|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t}))|\leqq k|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t})|$$

となるが，$k<1$ であるから，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t})$ でなければならない．とくに，点 $(\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{x}_0)$ は条件（6）をみたしているから，条件（7）をもみたす．

けっきょく，不等式 $|\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t}_0|<r$ で与えられる開集合 G において定義された方程式（4）の解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t})$ が存在し，しかもこの解は，不等式 $|\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t}_0|<r$, $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<a$ で与えられる開集合 U（点 $(\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{x}_0)$ を含む）において一意的である．これで定理 27 が証明された．

定理 28. 『定理 27 と同様に，関数行列式

$$\left|\frac{\partial f^i(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x})}{\partial x^j}\right|$$

は開集合 Γ の各点 $(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x})$ において 0 にならないと仮定する．さらに，偏導関数

$$\frac{\partial f^i(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x})}{\partial t^p}, \qquad p=1,\cdots\cdots,k\,;\ i=1,\cdots\cdots,n,$$

も Γ 全体で存在しかつ連続であると仮定する．そうすれば，方程式（4）のどんな解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t})=(\varphi^1(\boldsymbol{t}),\cdots\cdots,\varphi^n(\boldsymbol{t}))$ もこの解が定義されている開集合 G 全体で連続な偏導関数 $\dfrac{\partial\varphi^i(\boldsymbol{t})}{\partial t^p}$ $(p=1,\cdots\cdots,k\,;\ i=1,\cdots\cdots,n)$ をもつ』

証明 $\boldsymbol{t}_0$ を，方程式（4）の解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t})$ が定義されている開集合 G の任意の点とし，$\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t}_0)$ とおく．点 $\boldsymbol{t}_0$ のある近傍において偏導関数 $\dfrac{\partial\varphi^i}{\partial t^p}$ が存在しかつ連続であることをしめそう．

正の数 q, a を適当に取って，

$$|\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t}_0|\leqq q, \quad |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|\leqq a \tag{27}$$

ならば，点 $(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x})$ は開集合 Γ に属し，点 $\boldsymbol{t}$ は開集合 G に属し，かつ条件

$$|\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t})-\boldsymbol{x}_0|<a$$

がみたされるようにする．

導関数 $\dfrac{\partial\varphi^i}{\partial t^p}$ を計算するため，$\boldsymbol{e}_p$ を k-次元空間 T の p-軸方向の単位ベクトルとし，$\boldsymbol{t}_2=\boldsymbol{t}_1+\tau\boldsymbol{e}_p$ とおこう．ただし $\boldsymbol{t}_1$ は空間 T のベクトル，τ は実数である．そうすれば

$$\frac{\partial\varphi^i(\boldsymbol{t}_1)}{\partial t^p}=\lim_{\tau\to0}\frac{\varphi^i(\boldsymbol{t}_2)-\varphi^i(\boldsymbol{t}_1)}{\tau} \tag{28}$$

である．そこで

$$\psi^i(\boldsymbol{t}_1,\tau)=\frac{\varphi^i(\boldsymbol{t}_2)-\varphi^i(\boldsymbol{t}_1)}{\tau} \tag{29}$$

とおいて，まずこの関数の性質をしらべることにする．

正の数 r を十分小さく取って，$|\boldsymbol{t}_1-\boldsymbol{t}_0|\leqq r$, $|\tau|<r$ ならばベクトル $\boldsymbol{t}_1$, $\boldsymbol{t}_2$ は条件

$$|\boldsymbol{t}_1-\boldsymbol{t}_0|<q,\quad |\boldsymbol{t}_2-\boldsymbol{t}_0|<q$$

をみたすようにできる．

集合 (27) は凸集合だから，差

$$f^i(\boldsymbol{t}_2,\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t}_2))-f^i(\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t}_1))\ \ (=0)$$

にアダマールの補題を適用できる．すなわち

$$f^i(\boldsymbol{t}_2,\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t}_2))-f^i(\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t}_1))=\sum_{l=1}^{k}H_l^i(\boldsymbol{t}_1,\tau)(t_l^2-t_l^1)$$
$$+\sum_{j=1}^{n}K_j^i(\boldsymbol{t}_1,\tau)(\varphi^j(\boldsymbol{t}_2)-\varphi^j(\boldsymbol{t}_1))=0. \tag{30}$$

ここに，$H_l^i(\boldsymbol{t}_1,\tau)$ および $K_j^i(\boldsymbol{t}_1,\tau)$ は $|\boldsymbol{t}_1-\boldsymbol{t}_0|<r$, $|\tau|<r$ のとき連続である．

$$K_j^i(\boldsymbol{t}_0,0)=\frac{\partial}{\partial x^j}f^i(\boldsymbol{t}_0,\boldsymbol{x}_0)$$

で，関数行列式

$$\left|\frac{\partial}{\partial x^j}f^i(\boldsymbol{t}_0,\boldsymbol{x}_0)\right|$$

は 0 ではないから，r が十分小さければ行列式 $|K_j^i(\boldsymbol{t}_1,\tau)|$ は 0 にならない．$\tau\neq 0$ として等式 (30) を τ で割れば，

$$\sum_{j=1}^{n} K_j^i(\boldsymbol{t}_1,\tau)\psi^j(\boldsymbol{t}_1,\tau)=-H_p^i(\boldsymbol{t}_1,\tau) \tag{31}$$

がえられる．この方程式系は $\psi^j(\boldsymbol{t}_1,\tau)$ に関して解くことができて，

$$\psi^j(\boldsymbol{t}_1,\tau)=\chi^j(\boldsymbol{t}_1,\tau) \tag{32}$$

となる．ここで関数 $\chi^j(\boldsymbol{t}_1,\tau)$ は，$\tau=0$ の場合をも除外することなく，条件 $|\boldsymbol{t}_1-\boldsymbol{t}_0|<r$, $|\tau|<r$ のもとで定義され，かつ連続である．このことは，方程式系 (31) の係数およびその右辺が上の条件のもとで定義されかつ連続で，しかも係数の行列式が 0 にならないことからわかる．等式 (32) の左辺の関数は $\tau\neq 0$ に対してだけ定義されたものであり，右辺の関数は任意の $|\tau|<r$ に対して定義されかつ連続であるから，$\tau\to 0$ と極限移行すれば

$$\lim_{\tau\to 0}\psi^j(\boldsymbol{t}_1,\tau)=\chi^j(\boldsymbol{t}_1,0) \tag{33}$$

となる．等式 (28), (29) および (33) によって，$|\boldsymbol{t}_1-\boldsymbol{t}_0|<r$ のとき導関数 $\dfrac{\partial\varphi^j(\boldsymbol{t}_1)}{\partial t^p}$ が存在しかつ連続なことがわかる．

これで定理 28 が証明された．

例

1. R を n 次元ベクトル空間，$\boldsymbol{a}$ を R のある点とし，

$$u^j(\boldsymbol{x})=u^j(x^1,\cdots\cdots,x^n),\qquad j=1,\cdots\cdots,n, \tag{34}$$

を点 $\boldsymbol{a}$ のある近傍で定義された関数の系とする．いまこれらの関数も，それらの偏導関数 $\dfrac{\partial u^j(\boldsymbol{x})}{\partial x^i}$ も連続でかつ関数行列式 $\left|\dfrac{\partial u^j(\boldsymbol{x})}{\partial x^i}\right|$ は $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ のとき 0 にならないと仮定する．そうすれば，連続性によって，この行列式は点 $\boldsymbol{a}$ のある近傍において 0 にならない．関数の系 (34) を利用して，点 $\boldsymbol{a}$ のある近傍で点 $\boldsymbol{x}$ の座標 $x^1,\cdots\cdots,x^n$ の代わりにこの点のあたらしい座標 $y^1,\cdots\cdots,y^n$ を，

$$y^j=u^j(x^1,\cdots\cdots x^n),\qquad j=1,\cdots\cdots,n, \tag{35}$$

とおいて導入することができる．(ベクトルの記法をもちいて

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \tag{36}$$

と書く)

実際，定理 27 によって，方程式の系 (35) (ベクトル方程式 (36) といっても同じことだが) は $\boldsymbol{x}$ について解くことができる．つまり，点 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{a})$ のある近傍で定義

された変数 $\boldsymbol{y}$ の関数

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y}) \tag{37}$$

で，$\boldsymbol{y}$ に関して恒等的に

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y})) \tag{38}$$

をみたし，かつ $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}$ となるものが存在する．定理 28 によれば，ベクトル $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y})$ の成分 $v^1(\boldsymbol{y}),\cdots\cdots,v^n(\boldsymbol{y})$ は変数 $y^1,\cdots\cdots,y^n$ に関して連続な偏導関数をもつ．

恒等式 (38) とともに変数 $\boldsymbol{x}$ に関して

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})) \tag{39}$$

が恒等的に成り立つことを証明しよう．そのため，未知ベクトル $\boldsymbol{z}=(z^1,\cdots\cdots,z^n)$ に関する方程式

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{z}) \tag{40}$$

を考えよう．この方程式は自明な解 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}$ をもつ．いま，恒等式 (38) の $\boldsymbol{y}$ に関数 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ を代入すれば，$\boldsymbol{x}$ に関する恒等式

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})))$$

がえられる．これは，関数 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))$ が方程式 (40) の解になっていることをしめしているが，その一意性によって，この解は最初の解 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}$ と一致しなければならない．したがって $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))$ となる．けっきょく，(39) が恒等的に成り立つ．

恒等式 (38) および (39) は，変換 (36) と (37) とが互いに他の逆変換であって，空間 R の点 $\boldsymbol{a}$ のある近傍において座標 $x^1,\cdots\cdots,x^n$ から座標 $y^1,\cdots\cdots,y^n$ への，およびこの逆の，微分可能な座標変換となりうることをしめしている．

2. R を n-次元ベクトル空間，$\boldsymbol{a}$ をこの空間の点とし，

$$u^j(\boldsymbol{x})=u^j(x^1,\cdots\cdots,x^n),\qquad j=1,\cdots\cdots,k, \tag{41}$$

は点 $\boldsymbol{a}$ のある近傍で定義された関数の系とする．(41) の各関数は，その偏導関数 $\dfrac{\partial u^j(\boldsymbol{x})}{\partial x^i}$ とともに連続であると仮定しよう．

関数行列

$$\left(\frac{\partial u^j(\boldsymbol{x})}{\partial x^i}\right),\qquad i=1,\cdots\cdots,n\,;\,j=1,\cdots\cdots,k, \tag{42}$$

において添字 j は行の番号を，i は列の番号をあらわすものとするしたがって，(42) は k 行 n 列の行列である．各行

$$\left(\frac{\partial u^j(\boldsymbol{x})}{\partial x^1},\cdots\cdots,\frac{\partial u^j(\boldsymbol{x})}{\partial x^k}\right)$$

は関数 $u^j(\boldsymbol{x})$ のグラジエントである．もしも点 $\boldsymbol{a}$ におけるこの行列の階数が k に等しければ，連続性によって，点 $\boldsymbol{a}$ のある近傍においてもこの行列の階数は k に等しい．この場合，関数の系 (41) は独立であるという．行列 (42) の階数が点 $\boldsymbol{a}$ のある近傍において k より小さい場合には，関数の系 (41) は従属であるという．

$k<n$ で関数の系 (41) が独立ならば，適当に関数 $u^{k+1}(\boldsymbol{x}),\cdots\cdots,u^n(\boldsymbol{x})$ を補って，

$$u^1(\boldsymbol{x}), \cdots\cdots, u^k(\boldsymbol{x}), \cdots\cdots, u^n(\boldsymbol{x}) \tag{43}$$

が独立な関数系になるようにすることができる. 実際, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ のとき行列 (42) は定数行列で, その行ベクトルは1次独立である. この行列に定数を成分とする行ベクトルをつけ加えて退化しない正方行列をつくることができる. 追加されたこれらの行ベクトルはそれぞれある1次関数 $u^{k+1}(\boldsymbol{x}), \cdots\cdots, u^n(\boldsymbol{x})$ のグラジエントと考えることができる.

さて, つぎの重要な命題を証明しよう：関数の系 (41) は独立であるが, これにある関数 $w(\boldsymbol{x})$ をつけ加えた関数の系

$$u^1(\boldsymbol{x}), \cdots\cdots, u^k(\boldsymbol{x}), w(\boldsymbol{x}) \tag{44}$$

はもはや独立ではないと仮定する. そのとき, 連続な偏導関数をもつ関数 $W(y^1, \cdots\cdots, y^k)$ が存在して,

$$w(\boldsymbol{x}) = W(u^1(\boldsymbol{x}), \cdots\cdots, u^k(\boldsymbol{x})) \tag{45}$$

が変数 $\boldsymbol{x}$ について恒等的に成り立つ. 言い換えれば, 関数 $w(\boldsymbol{x})$ は関数 (41) によってあらわされる.

この命題を証明するために, 独立な関数の系 (41) にいくつかの関数を追加して, 独立な関数の系 (43) をつくり, この助けをかりて, 例1で述べたように

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$$

とおいて, あたらしい座標系を導入しよう. この関係の逆関数を $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y})$ とし,

$$W(\boldsymbol{y}) = w(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y})) \tag{46}$$

とおく. こうして定義された関数 $W(\boldsymbol{y}) = W(y^1, \cdots\cdots, y^n)$ は実際には $y^1, \cdots\cdots, y^k$ だけの関数であって, これがまさに求める関数 $W(y^1, \cdots\cdots, y^k)$ である. 実際, (46) の $\boldsymbol{y}$ に $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ を代入すれば, 恒等式 (39) によって

$$W(u^1(\boldsymbol{x}), \cdots\cdots, u^k(\boldsymbol{x})) = w(\boldsymbol{x})$$

がえられる. これは証明すべき等式 (45) にほかならない. 残されているのは, 関数 (49) が変数 $y^{k+1}, \cdots\cdots, y^n$ に無関係なことの証明である. そのため, これらの変数のうちの1つを y^r として,

$$\frac{\partial W(\boldsymbol{y})}{\partial y^r} = 0 \tag{47}$$

となることを証明しよう. $W(\boldsymbol{y})$ の定義 (46) から

$$\frac{\partial W(\boldsymbol{y})}{\partial y^r} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W(\boldsymbol{x})}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial v^i(\boldsymbol{y})}{\partial y^r}. \tag{48}$$

系 (41) は独立であるが系 (44) は独立ではないから, 関数 w のグラジエントは (41) の関数のグラジエントの1次結合であらわされる. すなわち,

$$\frac{\partial w(\boldsymbol{x})}{\partial x^i} = a_1 \frac{\partial u^1(\boldsymbol{x})}{\partial x^i} + \cdots\cdots + a_k \frac{\partial u^k(\boldsymbol{x})}{\partial x^i}, \quad i=1, \cdots\cdots, n. \tag{49}$$

ここに $a_1, \cdots\cdots, a_k$ は $\boldsymbol{x}$ の関数である. 等式 (49) に $\dfrac{\partial v^i(\boldsymbol{y})}{\partial y^r}$ をかけて i について加

え合わせれば，(48) によって

$$\frac{\partial W(\boldsymbol{y})}{\partial y^r}=a_1\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u^1(\boldsymbol{x})}{\partial x^i}\frac{\partial v^i(\boldsymbol{y})}{\partial y^r}+\cdots\cdots+a_k\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u^k(\boldsymbol{x})}{\partial x^i}\frac{\partial v^i(\boldsymbol{y})}{\partial y^r} \tag{50}$$

がえられる．ところが，$r>k$ であるから，明らかに

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u^s(\boldsymbol{x})}{\partial x^i}\frac{\partial v^i(\boldsymbol{y})}{\partial y^r}=\frac{\partial y^s}{\partial y^r}=0, \qquad s=1\cdots\cdots, k.$$

ゆえに，等式 (50) の右辺は 0 になり，これで等式 (47) が証明された．

補章 II

線 形 代 数

本章はこの本でもちいられる基礎的な事項の補足であって，最も初等的ないくつかの§で使用される線形代数の諸事項を述べる．§36 では §34 の諸結果をまったく利用せず，§35 の結果だけをもちいることを注意しておく．

§34. 最 小 多 項 式

固有値と固有ベクトル

A］ 実数または複素数を要素とする任意の正方行列

$$A=(a^i_j), \quad i,\ j=1,\ 2, \cdots\cdots, n,$$

には n 次元のベクトル空間 R の1次変換 $\boldsymbol{A}$ が対応する．具体的にいうと，$\boldsymbol{A}$ は空間 R のベクトル

$$\boldsymbol{x}=(x^1, \cdots\cdots, x^n)$$

に，

$$y^i=\sum_j a^i_j x^j$$

を成分とするベクトル

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{y}=(y^1, \cdots\cdots, y^n)$$

を対応させる1次変換である． 零行列 O（すべての要素が 0 であるような行列）には**零変換**，すなわち任意のベクトルを零ベクトルに写すような変換 $\boldsymbol{O}$ が対応する．単位行列：

$$E=(\delta^i_j) \qquad \left(\delta^i_j=\begin{cases}0, & i\neq j \text{ のとき} \\ 1, & i=j \text{ のとき}\end{cases}\right)$$

には空間 R の恒等変換 $\boldsymbol{E}$ すなわち，すべてのベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して，

$$\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$$

であるような変換が対応する．もし空間 R にあたらしい座標 $x'^1, \cdots\cdots, x'^n$ が導入されて，もとの座標 $x^1, \cdots\cdots, x^n$ との間に

$$x'^j=\sum_{i=1}^{n} s_i^j x^i \text{ (すなわち行列の記法によれば } \boldsymbol{x}'=S\boldsymbol{x})$$

という関係があれば，あたらしい座標系において変換 $\boldsymbol{A}$ に対応する行列は

$$A'=SAS^{-1} \tag{1}$$

となる．実際，（1）は

$$\boldsymbol{y}'=S\boldsymbol{y}=SA\boldsymbol{x}=SAS^{-1}\boldsymbol{x}'$$

からえられる．

B］ 空間 R の座標系を1つきめたとき，1次変換 $\boldsymbol{A}$ に対応する行列を A とする．関係式

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}=\lambda\boldsymbol{h} \tag{2}$$

をみたす $\boldsymbol{0}$ と異なるベクトル $\boldsymbol{h}$ を変換 $\boldsymbol{A}$ の**固有ベクトル**といい，λ をベクトル $\boldsymbol{h}$ に対応する変換 $\boldsymbol{A}$ の**固有値**という．行列 $(a_j^i-z\delta_j^i)$ の行列式

$$D(z)=|a_j^i-z\delta_j^i|=|A-zE|$$

を行列 A の**特性多項式**という．多項式 $D(z)$ の係数は座標系の取りかたに関係しないで，変換 $\boldsymbol{A}$ によって完全に決定することがわかる．したがって，多項式 $D(z)$ を変換 $\boldsymbol{A}$ の特性多項式ともいう．λ が変換 $\boldsymbol{A}$ の固有値になるのは，λ が多項式 $D(z)$ の根である場合でありかつその場合にかぎる．

多項式 $D(z)$ が座標系の取りかたに無関係なことを証明しよう．あたらしい座標系において変換 $\boldsymbol{A}$ に対応する行列は SAS^{-1}（S は退化しない行列）であるから，

$$\begin{aligned}|SAS^{-1}-zE|&=|SAS^{-1}-zSES^{-1}|=|S(A-zE)S^{-1}|\\&=|S|\cdot|A-zE|\cdot|S^{-1}|=|S|\cdot|A-zE|\cdot|S|^{-1}=|A-zE|\end{aligned}$$

となる．

つぎに，（2）と同値な関係 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{h}=\boldsymbol{0}$ を成分にわけて書けば，

$$\sum_{j=1}^{n}(a_j^i-\lambda\delta_j^i)h^j=0, \qquad i=1, \cdots\cdots, n,$$

となる．この同次方程式系が 0 でない解 $h^1, \cdots\cdots, h^n$ をもつのは，この系の行列式 $D(\lambda)$ が 0 の場合でありかつこの場合にかぎる．したがって，多項式 $D(z)$ の根 λ は変換 $\boldsymbol{A}$ の固有値であり，この逆も成り立つ．

C］ 変換 $\boldsymbol{A}$ の固有値 $\lambda_1, \cdots\cdots, \lambda_k$ が互いに異なる場合には，これらの固有値に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{h}_1, \cdots\cdots, \boldsymbol{h}_k$ は互いに1次独立である．

これを k に関する帰納法によって証明する．$k=1$ の場合には C］は明らかである．C］が $k-1$ 個のベクトルに対して成り立つと仮定して，k 個のベクトルに対しても成り立つことを証明しよう．いま，$a_1\boldsymbol{h}_1+\cdots\cdots+a_k\boldsymbol{h}_k=0$ であったとする．この関係に変換 $\boldsymbol{A}$ をほどこせば，

$$a_1\lambda_1\boldsymbol{h}_1+\cdots\cdots+a_k\lambda_k\boldsymbol{h}_k=0$$

となる．一方，

$$\lambda_k(a_1\boldsymbol{h}_1+\cdots\cdots+a_k\boldsymbol{h}_k)=0$$

であるから，上の2つの式の差をつくれば

$$a_1(\lambda_1-\lambda_k)\boldsymbol{h}_1+\cdots\cdots+a_{k-1}(\lambda_{k-1}-\lambda_k)\boldsymbol{h}_{k-1}=0$$

となる．この関係と帰納法の仮定とから $a_1=\cdots\cdots=a_{k-1}=0$ をうる．そのとき最初の式は $a_k\boldsymbol{h}_k=0$ となり，これから $a_k=0$ をうる．これで証明された．

したがって，特性多項式 $D(z)$ の根がすべて互いに異なる場合には，空間 R の基底として変換 $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルをとることができる．基底をこのようにとれば，変換 $\boldsymbol{A}$ に対応する行列は対角型になる．しかし $D(z)$ が重複根をもつ場合には，一般に，変換の行列を対角型にすることはできないので，それにかわる比較的複雑な理論を展開する必要がおこる．これを説明するのがこれからの目標の1つである．

最 小 多 項 式

D］ n 次の正方行列は一定の規則にしたがって互いに加え合わせることと掛け合わせること，および行列に数をかけることができる．行列どうしのこれらの演算には，変換どうしの同様な演算が対応する．変数 z の実または複素係数の任意の多項式

$$f(z)=a_0z^m+a_1z^{m-1}+\cdots\cdots+a_m$$

の z に行列 A を代入すれば，行列 A に関する多項式

$$f(A)=a_0A^m+a_1A^{m-1}+\cdots\cdots+a_mE$$

がえられる．まったく同様に，変換 $\boldsymbol{A}$ に関する多項式 $f(\boldsymbol{A})$ が定義される．$f(z)\not\equiv 0$ であっても行列 $f(A)$ は零行列になることがある（このとき変換 $f(\boldsymbol{A})$ も零変換になる）．このような $f(z)$ を行列 A（または変換 $\boldsymbol{A}$）の**零化多項式**という．行列 A の特性多項式 $D(z)$ は行列 A の零化多項式であることがわかる．すなわち

$$D(A)=O$$

となる．

このことを証明するため，

$$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots\cdots, \boldsymbol{e}_n$$

を基底とする n 次元のベクトル空間 R を考えよう．この基底を座標系にとれば，

$$\boldsymbol{e}_j=(0, \cdots\cdots, 1, \cdots\cdots, 0)$$

となる．ただし 1 は第 j 番目にある．この基底のもとで，行列 A に対応する変換を $\boldsymbol{A}$ であらわす．すなわち，

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_j=\sum_s a_j^s\boldsymbol{e}_s\text{.}$$

これはまた

$$\sum_s(a_j^s\boldsymbol{E}-\delta_j^s\boldsymbol{A})\boldsymbol{e}_s=0 \tag{3}$$

とも書ける．いま

$$L_j^s(z)=a_j^s-\delta_j^s z$$

とおけば，$L_j^s(z)$ は z の 0 次または 1 次の多項式であり，

$$(L_j^s(z))$$

は多項式を要素とする行列である．この行列の要素 $L_j^s(z)$ の余因子を $M_s^j(z)$ であらわせば，関係式

$$\sum_j M_i^j(z)L_j^s(z)=\delta_i^s D(z) \tag{4}$$

が成り立つ．（3）に $M_i^j(\boldsymbol{A})$ を左からかけ，つぎに j について加え合わせると，（4）によって

$$\sum_{s,j} M_i^j(\boldsymbol{A})(a_j^s\boldsymbol{E}-\delta_j^s\boldsymbol{A})\boldsymbol{e}_s=\sum_{s,j} M_i^j(\boldsymbol{A})L_j^s(\boldsymbol{A})\boldsymbol{e}_s$$
$$=\sum_s \delta_i^s D(\boldsymbol{A})\boldsymbol{e}_s=D(\boldsymbol{A})\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{0}$$

となるから，変換 $D(\boldsymbol{A})$ は空間 R のどの基底ベクトルをも零ベクトルにうつす．ゆえに変換 $D(\boldsymbol{A})$ は零変換であり，これに対応する行列 $D(A)$ もまた零行列，すなわち

$$D(A)=O$$

となる．

E］ 行列 A（または変換 $\boldsymbol{A}$）の零化多項式中には，常数因子を無視すれば，最低次の多項式 $\Delta(z)$ がただ1つ存在し，この多項式は行列 A の任意の零化多項式を整除する．この $\Delta(z)$ を行列 A の**最小多項式**という．以後，多項式 $\Delta(z)$ の最高次の係数は1であると仮定する．A が実行列の場合には，$\Delta(z)$ も実多項式である．この命題を証明しよう．任意の多項式 $f(z)$，$g(z)$ とその最大公約式 $d(z)$ に対し，多項式 $p(z)$，$q(z)$ を適当にえらべば，恒等式

$$d(z)=p(z)f(z)+q(z)g(z) \tag{5}$$

が成り立つ．（5）は多項式に関する互除法によって証明される．（5）からわかるように，$f(z)$，$g(z)$ が行列 A の零化多項式ならば，それらの最大公約式 $d(z)$ もまた行列 A の零化多項式である．われわれは **D**］において，行列 A の零化多項式の存在を知った．いま，$\Delta(z)$ を行列 A の最小多項式とし，$f(z)$ を行列 A の任意の零化多項式としよう．もし $f(z)$ が $\Delta(z)$ によって整除されなければ，この2つの多項式の最大公約式の次数は多項式 $\Delta(z)$ の次数よりも小さく，かつこの最大公約式も行列 A の零化多項式となる．これは多項式 $\Delta(z)$ の次数の最小性に矛盾する．つぎに，A を実行列とすれば，

$$O=\overline{\Delta(A)}=\bar{\Delta}(\bar{A})=\bar{\Delta}(A)$$

となるから，$\bar{\Delta}(z)$ は行列 A の零化多項式であり，それゆえ $\Delta(z)$ で割り切れる．ところが，このようなことは，$\Delta(z)=\bar{\Delta}(z)$ の場合にかぎっておこりうる．これで **E**］が証明された．

F］ $\Delta(z)$ を行列 A の最小多項式とする．λ が行列 A の固有値であるための必要十分条件は，λ が多項式 $\Delta(z)$ の根となることである．

これを証明するため，（座標系を1つきめたとき）行列 A に対応する n 次元ベクトル空間の変換を $\boldsymbol{A}$ であらわそう．任意の多項式 $f(z)$ に対して，

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}=\lambda\boldsymbol{h} \text{ ならば } f(\boldsymbol{A})\boldsymbol{h}=f(\lambda)\boldsymbol{h} \tag{6}$$

となる．実際，

$$\boldsymbol{E}\boldsymbol{h}=\boldsymbol{h},\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{h}=\lambda\boldsymbol{h},\ \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{h}=\boldsymbol{A}\lambda\boldsymbol{h}=\lambda^2\boldsymbol{h},\cdots\cdots,\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{h}=\lambda^m\boldsymbol{h}$$

となるから，これらの関係式に多項式 $f(z)$ の係数をかけて加え合わせれば，（6）がえられる．

λ を行列 A の固有値とすれば，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}=\lambda\boldsymbol{h}$ をみたすベクトル $\boldsymbol{h}\neq\boldsymbol{0}$ が存在するから，（6）によって $\Delta(\boldsymbol{A})\boldsymbol{h}=\Delta(\lambda)\boldsymbol{h}$ となる．ところが $\Delta(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$ であるから $\Delta(\lambda)=0$ がえられる．逆に，λ を多項式 $\Delta(z)$ の根とすれば，$\Delta(z)=(z-\lambda)\Gamma(z)$．$\Delta(z)$ は行列 A の最小多項式であるから，$\Gamma(z)$ はもはや零化多項式ではない．ゆえに $\Gamma(A)$ は零行列ではなく，変換 $\Gamma(\boldsymbol{A})$ も零変換ではない．したがって，$\Gamma(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{h}'\neq\boldsymbol{0}$ となるようなベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在して，$\boldsymbol{0}=\Delta(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\Gamma(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{h}'$ となり，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}'=\lambda\boldsymbol{h}'$ がえられる．ゆえに λ は行列 A の固有値である．

これで **F**〕が証明された．

ベクトル空間 R のベクトルの成分として実数だけがとられるか，または複素数がとられるかによって，R は**実ベクトル空間**または**複素ベクトル空間**といわれる．$\boldsymbol{x}=(x^1,\cdots\cdots,x^n)$ が複素ベクトル空間 R のベクトルであれば，$\bar{\boldsymbol{x}}=(\overline{x^1},\cdots\cdots,\overline{x^n})$ は $\boldsymbol{x}$ に**複素共役なベクトル**である．S が複素ベクトル空間 R の部分空間ならば，S に属するベクトルに複素共役なベクトルの全体 $\bar{S}$ も部分空間をなし，これを S に**複素共役な部分空間**という．

複素（または実）ベクトル空間 R がその2つの部分空間 S_1 と S_2 との直和であるというのは，R の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ が部分空間 S_i に属するベクトル $\boldsymbol{x}_i$（$i=1,2$）によって，一意的に

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$$

と書きあらわせることである．

G〕 行列 A の最小多項式 $\Delta(z)$ が $\Delta(z)=\Delta_1(z)\Delta_2(z)$ と互いに素な2つの

多項式の積に分解されたとしよう．行列 A に対応する変換を $\boldsymbol{A}$ とするとき，条件 $\Delta_i(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$ をみたす R のベクトル $\boldsymbol{x}$ の全体からなる R の部分空間を S_i $(i=1,2)$ であらわそう．このとき，空間 R は2つの部分空間 S_1 と S_2 との直和になる．（A が複素行列の場合にはもちろん R を複素ベクトル空間と考える）．A を実行列とすれば，つぎの2つの重要な場合がおこる：1) $\Delta_1(z)$, $\Delta_2(z)$ が実多項式の場合．この場合には，R と部分空間 S_1, S_2 は実ベクトル空間であると考えることができる．2) $\Delta_1(z)$, $\Delta_2(z)$ が互いに複素共役な多項式の場合．　この場合には R は複素ベクトル空間と考えなければならないが，そのとき部分空間 S_1, S_2 は互いに複素共役になる．

上の事実を証明しよう．多項式 $\Delta_1(z)$，$\Delta_2(z)$ は互いに素であるから，適当に多項式 $p_1(z)$，$p_2(z)$ をとれば，恒等式

$$1=p_1(z)\Delta_1(z)+p_2(z)\Delta_2(z) \tag{7}$$

が成り立つ（(5) を見よ）．$p_1(z)$, $p_2(z)$ は $\Delta_1(z)$，$\Delta_2(z)$ から互除法によってえられるから，$\Delta_1(z)$, $\Delta_2(z)$ が実多項式であれば $p_1(z)$，$p_2(z)$ も実多項式になることに注意してほしい．$\boldsymbol{x}$ を R の任意のベクトルとすれば，(7) から

$$\boldsymbol{x}=p_1(\boldsymbol{A})\Delta_1(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}+p_2(\boldsymbol{A})\Delta_2(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$$

となる．いま

$$\boldsymbol{x}_1=p_2(\boldsymbol{A})\Delta_2(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{x}_2=p_1(\boldsymbol{A})\Delta_1(\boldsymbol{A})x$$

とおけば，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$ をうる．しかも

$$\Delta_1(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}_1=\Delta_1(\boldsymbol{A})p_2(\boldsymbol{A})\Delta_2(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=p_2(\boldsymbol{A})\Delta(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},$$
$$\Delta_2(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}_2=\Delta_2(\boldsymbol{A})p_1(\boldsymbol{A})\Delta_1(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=p_1(\boldsymbol{A})\Delta(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

から，ベクトル $\boldsymbol{x}_i$ は部分空間 S_i に属する．ベクトル $\boldsymbol{x}$ が S_i に属するベクトル $\boldsymbol{x}_i'$ $(i=1,2)$ によって $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1'+\boldsymbol{x}_2'$ と書けたとすれば，(7) によって

$$\boldsymbol{x}_1'=p_1(\boldsymbol{A})\Delta_1(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}_1'+p_2(\boldsymbol{A})\Delta_2(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}_1'=p_2(\boldsymbol{A})\Delta_2(\boldsymbol{A})(\boldsymbol{x}_1'+\boldsymbol{x}_2')=\boldsymbol{x}_1$$

をうる．まったく同様に $\boldsymbol{x}_2'=\boldsymbol{x}_2$ をうるから，これで分解の一意性が証明された．

A が実行列で，因子 $\Delta_1(z)$，$\Delta_2(z)$ が実多項式であれば，実ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ も実ベクトルである．A が実行列で，$\Delta_1(z)$，$\Delta_2(z)$ が互いに複素

共役であれば，部分ベクトル空間 S_1, S_2 はそれらの定義のしかたによって互いに複素共役である．

これで **G**］が証明された．

H］ $\boldsymbol{A}$ を n 次元空間 R の1次変換とし，互いに異なる固有値の全部を

$$\lambda_1,\ \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_r$$

とする．そのときの変換 $\boldsymbol{A}$ の最小多項式は

$$\varDelta(z)=(z-\lambda_1)^{k_1}(z-\lambda_2)^{k_2}\cdots\cdots(z-\lambda_r)^{k_r},$$

特性多項式は

$$D(z)=(-1)^n(z-\lambda_1)^{q_1}(z-\lambda_2)^{q_2}\cdots\cdots(z-\lambda_r)^{q_r} \tag{8}$$

と書ける．多項式 $D(z)$ は多項式 $\varDelta(z)$ で割り切れるから

$$q_i \geqq k_i, \qquad i=1, \cdots\cdots, r,$$

である．**G**］によって空間 R はその部分空間 S_1, $S_2, \cdots\cdots, S_r$ の直和になる．ここに S_i は，条件

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})^{k_i}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

をみたすベクトル $\boldsymbol{x}$ 全体の集合で，その次元は q_i に等しいことがわかる．q_i を固有値 λ_i の**重複度**という．

空間 S_i の次元が q_i に等しいことを証明しよう．空間 S_i は変換 $\boldsymbol{A}$ に関して**不変**であるから，すなわち $\boldsymbol{A}S_i$ は S_i に含まれるから，変換 $\boldsymbol{A}$ を S_i 上だけで考えれば，空間 S_i における変換がえられる．空間 S_i の次元を p_i として，S_i に属する p_i 個の1次独立なベクトルを S_i の基底にとれば，S_i におけるこの変換には p_i 次の行列 A_i が対応する．いま空間 S_i $(i=1,\cdots\cdots,r)$ の基底を全部集めて空間 R の基底をつくれば，変換 $\boldsymbol{A}$ に対応する行列 A は主対角線上に行列 $A_1, \cdots\cdots, A_r$ をならべた形になる．ゆえに，$\boldsymbol{A}$ を空間 S_i 上に制限してえられる変換の特性多項式を $D_i(z)$ とすれば，空間 R の変換 $\boldsymbol{A}$ の特性多項式は

$$D_1(z)D_2(z)\cdots\cdots D_r(z)$$

になることがわかる．$\varDelta_i(z)=(z-\lambda_i)^{k_i}$ は部分空間 S_i 上での変換 $\boldsymbol{A}$ の零化多項式であるから，変換 $\boldsymbol{A}$ は S_i 上でただ1つの固有値 λ_i しかもたない．特性

多項式 $D_i(z)$ の次数は行列 A_i の次数すなわち空間 S_i の次元 p_i に等しいから，$D_i(z)=(-1)^{p_i}(z-\lambda_i)^{p_i}$ となる．したがって $D(z)=(-1)^n(z-\lambda_1)^{p_1}(z-\lambda_2)^{p_2}\cdots\cdots(z-\lambda_r)^{p_r}$ となり，これから $p_i=q_i$ がえられる（(8)を見よ）．これで **H**] が証明された．

§35. 行 列 の 関 数

この§では座標系を変えないから，変換 A とこれに対応する行列 A とを区別しないことにする．また，この§では複素変数関数論[1] のいくつかの事実を利用する．

行列のベキ級数

A] 行列 A の最小多項式を

$$\varDelta(z)=(z-\lambda_1)^{k_1}(z-\lambda_2)^{k_2}\cdots\cdots(z-\lambda_r)^{k_r}, \tag{1}$$

$$(k_i>0,\quad i=1,\cdots\cdots,r,\quad k_1+k_2+\cdots\cdots+k_r=k)$$

としよう．ここに

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\cdots\cdots,\lambda_r \tag{2}$$

は行列 A の互いに異なる固有値である．§34 の **F**] によって，(2) は行列 A のすべての固有値をつくしている．行列 A の各固有値 λ_i に数列

$$W^{(0)}(\lambda_i),\ W^{(1)}(\lambda_i),\cdots\cdots,W^{(k_i-1)}(\lambda_i),\quad i=1,\cdots\cdots,r, \tag{3}$$

が対応させられているとき，**行列 A のスペクトル上で関数 W が定義された**という．$W(z)$ が複素変数 z の関数であって点 λ_i において正則ならば，(3) を点 λ_i における $W(z)$ とその k_i-1 階までの導関数の値と考えることによって，行列 A のスペクトル上で定義された1つの関数がえられる．2つの複素関数に対して値 (3) がそれぞれ一致していれば，この2つの関数は**行列 A のスペクトル上で一致する**という．2つの多項式 $f(z)$ と $g(z)$ とが行列 A のスペクトル上で一致するための必要十分条件は $f(A)=g(A)$ となることである．また，任意に与えられた数列 (3) に対して，行列 A のスペクトル上で数列 (3) と一致するような $k-1$ 次以下の多項式 $\varphi(z)$ がつねにただ1つ存

1) たとえば，吉田洋一著「函数論」(岩波全書) を参照．

在する．すなわち

$$\varphi^{(j)}(\lambda_i)=W^{(j)}(\lambda_i),\quad j=0,\cdots\cdots,k_i-1,\ i=1,\cdots\cdots,r. \tag{4}$$

その際，多項式 $\varphi(z)$ の係数は（3）の各数の1次式になり，したがって，それらの連続関数となる．

上の事実を証明しよう．$h(z)=f(z)-g(z)$ とおけば，$f(A)=g(A)$ のとき $h(A)=O$ となる．また，多項式 $f(z)$ と $g(z)$ とが行列 A のスペクトル上で一致していれば，関数 $h(z)$ は行列 A のスペクトル上で0になる．ゆえに **A**］で多項式 $f(z)$，$g(z)$ に関して述べている部分を証明するには，$h(z)$ が行列 A の零化多項式になるのは $h(z)$ が行列 A のスペクトル上で0になる場合であり，かつその場合にかぎるということを証明すればよい．いま $h(z)$ を行列 A の零化多項式とすれば，§34 の **E**］によって $h(z)$ は最小多項式 $\varDelta(z)$ で割り切れ，λ_i は $h(z)$ の重複度 k_i（（1）を見よ）以上の根である．ゆえに $h(z)$ は行列 A のスペクトル上で0になる．逆に，$h(z)$ が行列 A のスペクトル上で0になれば，λ_i は $h(z)$ の重複度 k_i 以上の根である．よって $h(z)$ は多項式 $\varDelta(z)$（（1）を見よ）で割り切れ，$h(A)=O$ がえられる．

つぎに，上で述べた多項式 $\varphi(z)$ の存在を証明しよう．関係式（4′）は全体として多項式 $\varphi(z)$ の係数に関する1次方程式系と考えることができる．この系は k 個の未知数をもち k 個の方程式からなっている．**A**］を証明するにはこの系の行列式が0にならないことを証明すればよいが，それにはまた，この方程式系の右辺がすべて0ならば，条件（4）をみたす多項式 $\varphi(z)$ は恒等的に0に等しいことを証明すればよい．ところが，方程式系（4）の右辺が0の場合には多項式 $\varphi(z)$ は行列 A のスペクトル上で0になるから，すでに証明されたことによって，$\varphi(z)$ は多項式 $\varDelta(z)$ で割り切れる．しかるに $\varphi(z)$ の次数は $k-1$ を越えないから，$\varphi(z)$ は恒等的に0でなければならない．これで **A**］が証明された．

B］ A を実行列としよう．このとき A の最小多項式 $\varDelta(z)$ は実であるから（§34の **E**］を見よ），その各根 λ_i（（1）を見よ）に対して，それと同じ重複度をもつ複素共役な根 $\bar{\lambda}_i$ が存在する．もし数列（3）の各数が条件

$$W^{(j)}(\bar{\lambda}_i)=\overline{W^{(j)}(\lambda_i)}, \quad j=0, \cdots\cdots, k_i-1, \ i=1, \cdots\cdots, r, \qquad (5)$$

をみたしていれば，関係式（4）をみたす多項式 $\varphi(z)$ は実である．したがって行列 $\varphi(A)$ もまた実である．

このことを証明するため，多項式 $\varphi(z)$ の係数を $\varphi^1, \cdots\cdots, \varphi^k$ であらわそう．そうすれば，未知数 $\varphi^1, \cdots\cdots, \varphi^k$ に関する方程式系（4）は一般的に

$$\sum_{\beta=1}^{k} c_\beta^\alpha \varphi^\beta = d^\alpha, \quad \alpha=1, \cdots\cdots, k, \qquad (6)$$

と書くことができる．（5）によって，この系はその各方程式とともに，それらに複素共役な方程式

$$\sum_{\beta=1}^{k} \overline{c_\beta^\alpha} \varphi^\beta = \overline{d^\alpha}$$

をも同時に含んでいる．いま（6）の各式に対して，それらに複素共役な等式

$$\sum_{\beta=1}^{k} \overline{c_\beta^\alpha}\, \overline{\varphi^\beta} = \overline{d^\alpha} \qquad (7)$$

を考えれば，（7）は未知数 $\overline{\varphi^1}, \cdots\cdots, \overline{\varphi^k}$ に関する1次方程式系である．ところが，上に述べたような系（6）の特徴を考慮すれば，方程式系（7）はその各方程式の順序を度外視して方程式系（6）に一致する．系（6）の行列式は0でないから，その2組の解 $\varphi^1, \cdots\cdots, \varphi^k$ と $\overline{\varphi^1}, \cdots\cdots, \overline{\varphi^k}$ とは互いに一致する．すなわち $\varphi^\alpha=\overline{\varphi^\alpha}$ $(\alpha=1, \cdots\cdots, k)$ がえられる．これは $\varphi^1, \cdots\cdots, \varphi^k$ が実数であることをしめすものにほかならない．これで **B**］が証明された．

$f(z)$ を収束半径 ρ のベキ級数によって定義された複素変数 z の解析関数としよう：

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots\cdots+a_mz^m+\cdots\cdots. \qquad (8)$$

（8）は $|z|<\rho$ のとき収束し，$|z|>\rho$ のとき発散する．

（8）の右辺を項別に微分してえられるベキ級数

$$a_1+2a_2z+\cdots\cdots+ma_mz^{m-1}+\cdots\cdots$$

の収束半径もやはり級数（8）のそれと同じであって，この級数はその収束円内において関数 $f(z)$ の導関数 $f'(z)$ に収束する．すなわち

$$f'(z)=a_1+2a_2z+\cdots\cdots+ma_mz^{m-1}+\cdots\cdots.$$

級数（8）の z に行列 A を代入するとき，行列の級数

$$f(A)=a_0E+a_1A+\cdots\cdots+a_mA^m+\cdots\cdots \tag{9}$$

は収束することがある（行列の級数が収束するというのは，その各項の (i,j)-要素からつくられる級数が任意の i，$j=1,\cdots\cdots,n$ に対して収束することである）．その場合，関数 $f(z)$ は行列 A に対して定義される，という．

定理 29. 『命題 A』の記号を流用しよう．行列 A の固有値がすべて級数（8）の収束円内にあれば，すなわち

$$|\lambda_i|<\rho, \quad i=1,\cdots\cdots,r,$$

ならば，行列の級数（9）は収束し行列 $f(A)$ が定義される．そのとき

$$f(\lambda_i), \quad i=1,\cdots\cdots,r, \tag{10}$$

は（そのいくつかが一致することもありうる）行列 $f(A)$ の固有値のすべてをつくす．行列 A の固有値 λ_i $(i=1,\cdots\cdots,r)$ がさらに関数 $g(z)$ を定義する級数の収束円内にもあるとしよう（したがって行列 $g(A)$ も定義される）．このとき行列 $f(A)$ と $g(A)$ とが一致するための必要十分条件は，関数 $f(z)$ と $g(z)$ とが行列 A のスペクトル上で一致することである』

証明　級数（8）の部分和

$$f_m(z)=a_0+a_1z+\cdots\cdots+a_mz^m$$

をつくれば，$|z|<\rho$ のとき

$$f^{(j)}(z)=\lim_{m\to\infty}f_m^{(j)}(z)$$

となる．つぎに，行列 A のスペクトル上で多項式 $f_m(z)$ に一致するような $k-1$ 次以下の多項式を $\varphi_m(z)$ とする．行列 A の固有値（2）は条件 $|\lambda_i|<\rho$ $(i=1,\cdots\cdots,r)$ をみたしているのであるから，

$$\lim_{m\to\infty}\varphi_m^{(j)}(\lambda_i)=f^{(j)}(\lambda_i), \quad j=0,\cdots\cdots,k_i-1, \quad i=1,\cdots\cdots,r,$$

が成り立つ．このことと A］とによって，多項式列 $\varphi_m(z)$ は $k-1$ 次以下のある多項式 $\varphi(z)$ に係数ごとに収束し，かつ $\varphi(z)$ と $f(z)$ とは行列 A のスペクトル上で一致することがわかる．$\varphi_m(z)$ と $f_m(z)$ とは行列 A のスペクトル上で一致しているから

$$f_m(A)=\varphi_m(A)$$

である．この右辺は $m\to\infty$ のとき $\varphi(A)$ に収束し，このことは $m\to\infty$ のとき左辺も収束することをしめす．したがって級数（9）は行列 $f(A)=\varphi(A)$ に収束する．

つぎに，多項式

$$\Gamma(z)=[z-f(\lambda_1)]^{k_1}[z-f(\lambda_2)]^{k_2}\cdots\cdots[z-f(\lambda_r)]^{k_r}$$

は行列 $f(A)$ の零化多項式であることを証明しよう．そのため，多項式

$$\Phi_m(z)=[\varphi_m(z)-\varphi_m(\lambda_1)]^{k_1}[\varphi_m(z)-\varphi_m(\lambda_2)]^{k_2}\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots[\varphi_m(z)-\varphi_m(\lambda_r)]^{k_r} \qquad (11)$$

を考え，これが行列 A の零化多項式であることをしめそう．多項式 $\varphi_m(z)-\varphi_m(\lambda_i)$ は $z=\lambda_i$ のとき 0 になるから $z-\lambda_i$ で割り切れる．ゆえに，多項式 (11) は

$$\Phi_m(z)=\Psi_m(z)\Delta(z)$$

と書くことができ，$\Phi_m(z)$ は行列 A の零化多項式になることがわかる．すなわち

$$[\varphi_m(A)-\varphi_m(\lambda_1)E]^{k_1}[\varphi_m(A)-\varphi_m(\lambda_2)E]^{k_2}\cdots\cdots[\varphi_m(A)-\varphi_m(\lambda_r)E]^{k_r}=O$$

この関係式において $m\to\infty$ と極限移行すれば，

$$[f(A)-f(\lambda_1)E]^{k_1}[f(A)-f(\lambda_2)E]^{k_2}\cdots\cdots[f(A)-f(\lambda_r)E]^{k_r}=O$$

が成り立つ．これは $\Gamma(z)$ が行列 $f(A)$ の零化多項式であることをしめすものにほかならない．

上で証明されたことからとくに，行列 $f(A)$ の固有値はすべて (10) に含まれていることがわかる（§34 の F] を見よ）．

逆に，(10) の各数は行列 $f(A)$ の固有値であることを証明しよう．$\boldsymbol{h}_i$ を行列 A の固有値 λ_i に対応する固有ベクトルとする，すなわち

$$A\boldsymbol{h}_i=\lambda_i\boldsymbol{h}_i.$$

これと §34 の公式（6）とから

$$f_m(A)\boldsymbol{h}_i=f_m(\lambda_i)\boldsymbol{h}_i$$

がえられる．この関係式において $m\to\infty$ と極限移行すれば

$$f(A)h_i=f(\lambda_i)h_i$$

となる．ゆえに $f(\lambda_i)$ は行列 $f(A)$ の固有値である．

つぎに，関数 $g(z)$ の収束円が行列 A のすべての固有値を含んでいるとしよう．そうすれば，すでに証明された事実から，行列 $g(A)$ が定義され，かつ行列 A のスペクトル上で関数 $g(z)$ と一致するような $k-1$ 次以下の多項式 $\psi(z)$ が存在して $\psi(A)=g(A)$ となる．いま $f(A)=g(A)$ ならば $\varphi(A)=\psi(A)$ となり，**A**］によって多項式 $\varphi(z)$ と $\psi(z)$ とは行列 A のスペクトル上で一致する．したがって，関数 $f(z)$ と $g(z)$ もまた行列 A のスペクトル上で一致する．逆に，関数 $f(z)$ と $g(z)$ とが行列 A のスペクトル上で一致していれば，多項式 $\varphi(z)$ と $\psi(z)$ とがやはり行列 A のスペクトル上で一致するから，**A**］によって $\varphi(A)=\psi(A)$ となり，これより $f(A)=g(A)$ がえられる．これで定理29が証明された．

行列の陰関数

$F(z,w)$ をつぎのような級数で与えられる2つの複素変数の関数とする：

$$F(z,w)=a+bz+cw+dz^2+ezw+fw^2+\cdots\cdots. \tag{12}$$

この級数の項の因子の順序を変更しても（たとえば，積 $z^\alpha w^\beta$ を $w^\beta z^\alpha$ としても）関数 $F(z,w)$ の値は変わらないから，級数 (12) の変数 z,w にそれぞれ行列 A,B を代入する場合，行列 A,B が互いに交換可能な場合だけに話をかぎるのは自然なことである．級数 (12) が任意の z,w に対して収束する場合には，その z,w に互いに交換可能な任意の行列 A,B を代入してえられる行列の級数は収束することが証明される．そのときの級数の和を $F(A,B)$ であらわす．しかし，ここではこのような一般の場合の証明はしない．というのは，今後われわれは z を含む項を有限個しかもたない特別な形の級数，すなわち本質的には1個の複素変数 w の収束する級数だけを考えるからである．

C］ $F(z,w)$ をすべての z,w に対して収束するような級数 (12) によって定義された解析関数とし，A を与えられた行列とする．さらに，行列 A の各固有値 λ_i に，条件

$$F(\lambda_i, \mu_i)=0, \quad \frac{\partial}{\partial w}F(\lambda_i, \mu_i)\neq 0, \quad i=1, \cdots\cdots, r, \tag{13}$$

をみたす数 μ_i が対応させられていると仮定しよう．このとき，A と交換可能でかつ条件

$$F(A, B)=O \tag{14}$$

をみたす行列 B が存在する．また級数 (12) の係数および行列 A が実であって，かつ行列 A の互いに複素共役な固有値 λ_i, $\lambda_j=\bar{\lambda}_i$ に対応する数 μ_i, μ_j がまた互いに複素共役すなわち $\mu_i=\bar{\mu}_j$ ならば，A と交換可能でかつ条件 (14) をみたすような実行列 B が存在する．

このことを証明しよう．関係式 (13) と複素変数の陰関数に関する定理とによって，条件

$$F(z, W(z))=0 \tag{15}$$

$$W(\lambda_i)=\mu_i, \quad i=1, \cdots\cdots, r, \tag{16}$$

をみたすような関数 $W(z)=W_i(z)$ が任意の $i=1, \cdots\cdots, r$ に対して λ_i の近傍で存在する．関数 $W(z)$ の導関数の $z=\lambda_i$ における値 $W^{(j)}(\lambda_i)$ を求めるには，(15) を z について順次に微分して $z=\lambda_i$ とすればよい．すなわち関係式

$$\frac{d^j}{dz^j}F(z, W(z))\bigg|_{z=\lambda_i}=0 \tag{17}$$

から，

$$W^{(j)}(\lambda_i), \quad j=1, \cdots\cdots, k_i-1, \quad i=1, \cdots\cdots, r, \tag{18}$$

が求まる．(16), (18) をもとにして，条件（4）をみたす多項式 $\varphi(z)$ をつくる．このとき行列 $B=\varphi(A)$ は（明らかに A と交換可能で）条件 (14) をみたすことをしめそう．

$w=\varphi(z)$ を級数 (12) に代入すると変数 z の関数 $\Phi(z)=F(z, \varphi(z))$ がえられる．(14) を証明するには，関数 $\Phi(z)$ が行列 A のスペクトル上で 0 になることをいえばよい（定理 29 を見よ）．関数 $\Phi(z)$ の導関数の $z=\lambda_i$ における値 $\Phi^{(j)}(\lambda_i)$ ($j=0, 1, \cdots\cdots, k_i-1$) を計算する場合には，多項式 $\varphi(z)$ を関数 $W(z)$ でおきかえることができる．なぜなら，$z=\lambda_i$ における関数 $\varphi(z)$ およ

び $W(z)$ の $0,1,\cdots\cdots,k_i-1$ 階の導関数の値はそれぞれ互いに等しいからである．ところが，$F(z,\varphi(z))$ において多項式 $\varphi(z)$ を，λ_i の近傍で定義された関数 $W(z)$ でおきかえれば，恒等的に0に等しい関数がえられる（(15) を見よ）．ゆえに，関数 $\Phi(z)$ は行列 A のスペクトル上で0になる．

つぎに，級数 (12) の係数および行列 A が実であって，μ_i が共役条件

$$W(\bar{\lambda}_i)=\overline{W(\lambda_i)},\qquad i=1,\cdots\cdots,r,$$

をみたしている場合には，多項式 $\varphi(z)$ したがって行列 $B=\varphi(A)$ も実であることを証明しよう．実際，以上の仮定のもとでは，条件式 (17) から計算される数 $W^{(j)}(\lambda_i)$ は条件（5）をみたすから，**B**］によって $\varphi(z)$ は実多項式である．これで **C**］が証明された．

D］ 複素変数 z の解析関数 e^z は，すべての z に対して収束する級数

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{z^m}{m!}+\cdots\cdots \tag{19}$$

によって定義される．周知のように，任意の複素数 z,w に対してつねに $e^{z+w}=e^z\cdot e^w$ が成り立つ．この関係は級数 (19) の性質からえられる．このことから，互いに交換可能な任意の行列 A,B に対して，つねに

$$e^{A+B}=e^A\cdot e^B \tag{20}$$

が成り立つ．また退化しない任意の行列 A に対して，A と交換可能でかつ条件

$$e^B=A \tag{21}$$

をみたすような行列 B が存在することがわかる．さらに，退化しない任意の実行列 A に対して，A と交換可能でかつ条件

$$e^{B_1}=A^2 \tag{22}$$

をみたすような実行列 B_1 が存在する．

方程式 (21) が B に関して解けることを証明するには，関数 $F(z,w)=e^w-z$ に **C**］を適用すればよい．実際，行列 A は退化しないから，その固有値 λ_i はすべて0と異なり，条件 $e^{\mu_i}-\lambda_i=0$ をみたす数 μ_i が存在し（(13) の第1式を見よ），かつ明らかに (13) の第2式も成り立つ．

条件 (22) をみたす実行列 B_1 が存在することを証明するには，関数 $F(z,w)$

$=e^w-z^2$ に C〕の後半を適用すればよい．実際，λ_i が正または負の実数の場合には $\mu_i=\log\lambda_i^2$ (log の実の分枝をとって) とし，λ_i が複素数の場合には $W(\lambda_i)$，$W(\bar{\lambda}_i)$ として共役な複素数をとることができる．これでD〕が証明された．

§36.　行列のジョルダン標準形

A〕 空間 R のベクトルの列

$$\boldsymbol{h}_1, \cdots\cdots, \boldsymbol{h}_m \tag{1}$$

が変換 $\boldsymbol{A}$ の固有値 λ に対応する１つの特性系列であるというのは，つぎの関係がみたされることである：

$$\boldsymbol{h}_1 \neq \boldsymbol{0}\,;\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{h}_1=\lambda\boldsymbol{h}_1,\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{h}_2=\lambda\boldsymbol{h}_2+\boldsymbol{h}_1, \cdots\cdots,\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{h}_m=\lambda\boldsymbol{h}_m+\boldsymbol{h}_{m-1}.$$

変換 $\boldsymbol{A}$ の行列 A が実の場合には，

$$\bar{\boldsymbol{h}}_1, \cdots\cdots, \bar{\boldsymbol{h}}_m \tag{2}$$

は明らかに固有値 $\bar{\lambda}$ に対応する特性系列になる．（１）と（２）とは互いに共役な特性系列であるといわれる．λ が実数で（１）が実ベクトルならば，この特性系列は実であるという．

定理 30. 『空間 R の基底で変換 $\boldsymbol{A}$ の１つまたはいくつかの特性系列からなるものが存在する．Aが実行列の場合には，実固有値に対応する特性系列は実で，互いに複素共役な固有値に対応する特性系列は互いに共役であるようないくつかの特性系列からなる基底をとることができる』

証明　行列 A の互いに異なる固有値を

$$\lambda_1, \cdots\cdots, \lambda_r$$

とし，行列 A の最小多項式を

$$\Delta(z)=(z-\lambda_1)^{k_1}\cdots\cdots(z-\lambda_r)^{k_r} \tag{3}$$

としよう．§34 の G〕によって，空間 R は（３）の各因子に対応する部分空間 $S_1, \cdots\cdots, S_r$ の直和になる．空間 S_i は条件 $(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})^{k_i}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ をみたすベクトル $\boldsymbol{x}$ の全体からなる．このことは，空間 S_i 上だけで考えた変換 $\boldsymbol{A}$ の零化多項式は $(z-\lambda_i)^{k_i}$ であるということにほかならない．容易にわかるように，

$(z-\lambda_i)^{k_i}$ は $\boldsymbol{A}$ の最小多項式である.

Aを実行列と仮定する. まず, λ_i が実数であるような (3) の因子を全部ひとまとめにしてそれを $\Delta_1(z)$ とし, 残り全部を $\Delta_2(z)$ としよう. そのとき, $\Delta(z)=\Delta_1(z)\Delta_2(z)$ は互いに素な実因子の積であるから, この分解に対応して空間 R を2つの実部分空間 R_1, R_2 の直和にすることができる. つぎに空間 R_1 を実固有値 λ_i に対応するいくつかの実部分空間の直和にして, 以下に見るように, これらの実部分空間の中で実の特性系列からなる基底をつくる. また空間 R_2 を互いに複素共役な固有値に対応する互いに複素共役ないくつかの部分空間の直和にして, 以下に見るように, これらの複素共役な空間の中で共役な特性系列からなる基底をつくる. この場合には, 互いに複素共役な部分空間のうちのどちらか一方の中で特性系列からなる基底をつくれば, これと共役な基底はもう一方の部分空間の基底になる.

したがって, つぎのことを証明すれば十分である: ベクトル空間 S の1次変換 $\boldsymbol{A}$ の最小多項式が $(z-\lambda)^k$ ならば, この空間の基底として変換 $\boldsymbol{A}$ の特性系列をとることができる. また空間 S, 行列 A および数 λ が実ならば, 実の特性系列からなる基底をとることができる.

このことを証明しよう. 簡単のため $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}$ とおいて, 条件

$$\boldsymbol{C}^i\boldsymbol{x}=0$$

をみたす空間 S のベクトル $\boldsymbol{x}$ 全体の集合を T_i とする. このとき

$$S=T_k\supset T_{k-1}\supset\cdots\cdots\supset T_1\supset T_0=0$$

となる. いま

$$\boldsymbol{h}_i^1, \cdots\cdots, \boldsymbol{h}_i^r \qquad (i=1, \cdots\cdots, k)$$

を空間 T_{i-1} を法として1次独立な空間 T_i のベクトルとする. すなわち, ベクトル

$$a_1\boldsymbol{h}_j^1+\cdots\cdots+a_r\boldsymbol{h}_i^r$$

が空間 T_{i-1} に属するのは,

$$a_1=\cdots\cdots=a_r=0$$

のときにかぎるとする. i, j をきめれば, ベクトル

$$h_{i-j}^{\alpha}=C^{j}h_{i}^{\alpha} \quad (j<i) \tag{4}$$

は空間 T_{i-j} に属し，かつ空間 T_{i-j-1} を法として1次独立であることをしめそう．

$$C^{i-j}h_{i-j}^{\alpha}=C^{i}h_{i}^{\alpha}=0 \quad (\alpha=1,\cdots\cdots,r)$$

となるから，ベクトル（4）は空間 T_{i-j} に属する．つぎに，ベクトル

$$a_1h_{i-j}^{1}+\cdots\cdots+a_rh_{i-j}^{r}=x$$

が空間 T_{i-j-1} に属したとすると，

$$0=C^{i-j-1}x=C^{i-1}(a_1h_i^1+\cdots\cdots+a_rh_i^r)$$

となる．これはベクトル $a_1h_i^1+\cdots\cdots+a_rh_i^r$ が空間 T_{i-1} に属することを意味するから，$a_1,\cdots\cdots,a_r$ はすべて0である．

こんどは空間 T_{k-1} を法として1次独立な空間 T_k のベクトルの極大系

$$h_k^1,\cdots\cdots,h_k^{r_k} \tag{5}$$

をとろう．すでに証明したように，ベクトル

$$h_{k-1}^{\alpha}=Ch_k^{\alpha} \quad (\alpha=1,\cdots\cdots,r_k) \tag{6}$$

は空間 T_{k-1} に属し，かつ空間 T_{k-2} を法として1次独立である．ゆえに，ベクトル（6）に適当なベクトルをつけ加えて，

$$h_{k-1}^1,\cdots\cdots,h_{k-1}^{r_{k-1}} \quad (r_{k-1}\geqq r_k) \tag{7}$$

が空間 T_{k-2} を法として1次独立な空間 T_{k-1} のベクトルの極大系になるようにすることができる．この方法を順次に続けていけば，空間 T_{i-1} を法として1次独立な空間 T_i $(i>0)$ のベクトルの極大系

$$h_i^1,\cdots\cdots,h_i^{r_i} \tag{8}$$

で，関係式

$$h_i^{\alpha}=Ch_{i+1}^{\alpha} \quad (\alpha=1,\cdots\cdots,r_{i+1}\,;\,r_i\geqq r_{i+1})$$

をみたすものが構成される．

つぎに（8）において $i=j,j-1,\cdots\cdots,1$ としてえられるベクトルの全体の集合 $\sum_j$ は空間 T_j の基底になることを証明しよう．証明は数 j に関する帰納法による．$j=1$ の場合には $\sum_1$ は（8）において $i=1$ とした場合にほかならないから，それは空間 T_1 $(T_0=0)$ の基底である．上の事実が $\sum_j$ に対

して成り立つと仮定して，$\sum_{j+1}$ に対しても成り立つことを証明しよう．いま

$$a_1\boldsymbol{h}_{j+1}^1+\cdots\cdots+a_{r_{j+1}}\boldsymbol{h}_{j+1}^{r_{j+1}}+b_1\boldsymbol{h}_j^1+\cdots\cdots+b_{r_j}\boldsymbol{h}_j^{r_j}+\cdots\cdots=0 \qquad (9)$$

という関係があったとしよう．(9) に変換 C^j をほどこすと，

$$a_1\boldsymbol{h}_1^1+\cdots\cdots+a_{r_{j+1}}\boldsymbol{h}_1^{r_{j+1}}=0$$

となるが，これは条件 $a_1=\cdots\cdots=a_{r_{j+1}}=0$ の場合にかぎって成り立つ．したがって (9) 式には $\sum_j$ に属するベクトルだけがあらわれ，帰納法の仮定によって，その係数はすべて0でなければならない．つぎに $\boldsymbol{x}$ を空間 T_{j+1} の任意のベクトルとする．(8) において $i=j+1$ としたものは，空間 T_j を法として1次独立な空間 T_{j+1} のベクトルの極大系であるから，適当にベクトル

$$\boldsymbol{y}=a_1\boldsymbol{h}_{j+1}^1+\cdots\cdots+a_{r_{j+1}}\boldsymbol{h}_{j+1}^{r_{j+1}}$$

をとって，ベクトル $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ は空間 T_j に属するようにすることができる．ゆえに，帰納法の仮定によって，$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ は $\sum_j$ に属するベクトルの1次結合としてあらわされる．これはベクトル $\boldsymbol{x}$ が $\sum_{j+1}$ に属するベクトルの1次結合としてあらわされることにほかならない．これで，$\sum_k$ は空間 $S=T_k$ の基底であることが証明された．

空間 S，行列 A および数 λ が実の場合には，実ベクトルからなる系 (5) をとることによって，実ベクトル系 (6) がえられ，これに実ベクトルをつけ加えて実ベクトル系 (7) がえられる．この方法を順次に続けていって実ベクトル系 $\sum_k$ がえられる．

さて，$\sum_k$ が特性系列からなることすなわちベクトル $\boldsymbol{h}_1^\alpha$, $\boldsymbol{h}_2^\alpha$, …… は固有値 λ に対応する特性系列であることをしめそう．

$$0=C\boldsymbol{h}_1^\alpha=(A-\lambda E)\boldsymbol{h}_1^\alpha$$

であるから，$A\boldsymbol{h}_1^\alpha=\lambda\boldsymbol{h}_1^\alpha$ となる．つぎに

$$\boldsymbol{h}_1^\alpha=C\boldsymbol{h}_2^\alpha=(A-\lambda E)\boldsymbol{h}_2^\alpha$$

であるから，$A\boldsymbol{h}_2^\alpha=\lambda\boldsymbol{h}_2^\alpha+\boldsymbol{h}_1^\alpha$ となる．以下同様．

これで定理 30 が証明された．

定理 30 でつくられた基底のもとでは変換 A に対応する行列はもはや $A=(a_j^i)$ ではなく，とくに簡単な形をしたある新らしい行列 $B=(b_j^i)$ である．こ

の行列を**ジョルダン標準形**という．ゆえに定理 30 は1つの行列を**ジョルダン標準形にする定理**であるといえる．この問題をもっと詳しくしらべてみよう．

B〕 固有値 λ をもつ m 次の**ジョルダン区画**というのは，つぎのように定義される m 次の正方行列 (g^i_j) のことである：

$$g^i_i=\lambda \quad (i=1,\cdots\cdots,m),\quad g^i_{i+1}=1 \quad (i=1,\cdots\cdots,m-1),$$

$$g^i_j=0 \ (j-i<0 \text{ および } j-i>1 \text{ のとき}),$$

すなわち行列

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots\cdots\cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots\cdots\cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

のことである．任意の n 次の正方行列 A に対して，退化しない正方行列 S を適当にとれば，S による行列 A の相似変形 $B=SAS^{-1}$ をジョルダン標準形——主対角線上に1つまたはいくつかのジョルダン区画をならべてそれ以外の要素はすべて0にしたような行列——にすることができる．

この事実を証明しよう．R を n 次元のベクトル空間とし，$\boldsymbol{A}$ を（ある基底のもとで）行列 A に対応する1次変換とする．いま $\boldsymbol{f}_1,\cdots\cdots,\boldsymbol{f}_n$ を特性系列からなる空間 R の基底とし（定理 30 を見よ），このベクトル列はいくつかの特性系列を順次にならべたものであると仮定する．基底 $\boldsymbol{f}_1,\cdots\cdots,\boldsymbol{f}_n$ のもとで変換 $\boldsymbol{A}$ に対応する行列を $B=(b^i_j)$ とする．

$$\boldsymbol{h}_1=\boldsymbol{f}_1,\cdots\cdots,\boldsymbol{h}_m=\boldsymbol{f}_m$$

をベクトル列 $\boldsymbol{f}_1,\cdots\cdots,\boldsymbol{f}_n$ の中にある最初の特性系列とし，λ をこれに対応する固有値としよう．そうすれば，特性系列の定義からすぐにわかるように，

$$b^i_i=\lambda \ (i=1,\cdots\cdots,m),\quad b^i_{i+1}=1 \ (i=1,\cdots\cdots,m-1),$$

$$b^i_j=0 \ (i+1<j\leqq m \text{ および } j<i\leqq m \text{ のとき}),$$

となる．このようにベクトル列 $\boldsymbol{f}_1,\cdots\cdots,\boldsymbol{f}_n$ に含まれる最初の特性系列には行列 B の中の最初のジョルダン区画が対応する．まったく同様に，基底 $\boldsymbol{f}_1,\cdots\cdots,$

f_n に含まれる第2の特性系列には行列 B の中の第2のジョルダン区画が対応する．以下同様である．行列 A から行列 B にうつるのは座標系の変換によって実現されるから，$B=SAS^{-1}$（§34，**A**〕を見よ）．

これで **B**〕が証明された．

訳者あとがき

本書は Л. С. Понтрягин：Обыкновенные дифференциальные уравнения (Москва, 1961) の全訳である．著者ポントリャーギン教授は早くから位相幾何学，連続群論，微分方程式論などの多くの分野にわたって数々の輝かしい先駆的業績をあげている世界的に高名なソビエト連邦の誇る数学者である．現在もソ連数学界の指導的学者の１人として精力的な研究を続けており，最近では彼とその協力者たちによる研究《常微分方程式と最適制御の理論》に対して 1961 年度のレーニン賞が与えられている．

本書は著者が序文でも強調されているように，実際に役だつ常微分方程式の理論への懇切な入門書であるが，従来の微分方程式に関する入門書とは非常に趣を異にしている．その内容と扱いかたはまことに現代的な感覚と新鮮味とにあふれていて，いささかも読者を飽かすことなく，自然に微分方程式に対する深い関心と興味とを持たせてしまう．

微分方程式に関する入門書は今までに実に数多く世に出ており，これらについて批判することは浅学な訳者の力が許さないが，その多くはいたずらに計算のための計算に終始していたと言えないだろうか．しかも，応用に重点がおかれる数学書では数学的厳密さが第二義的にされがちであり，そのために透明な理解がさまたげられ，また数学的理論の解説を主とする書物は応用方面の人々から敬遠されがちな極端さをもちやすい．このような傾向はとくに入門書においていちじるしいと考えるのは，あながち訳者の独断とは言い切れないのではなかろうか．

本書は題材の周到な選択，悠々迫らぬゆきとどいた説明，豊富な例によってみごとなまとまりを見せ，著者の一貫した態度と情熱とが感じられ，数多くの入門書の中でも異彩を放っている．しかも，入門書にありがちな上記のディレ

ンマをもみごとに解消している．本書はおそらく，微分方程式の入門書としての名著たるにとどまらず，この分野への今後の入門書のありかたをも示唆するものとなるであろうことを訳者は信じてうたがわない．

訳者は原著の新鮮味にあふれた魅力に強くひかれ，非常な意欲を燃やして翻訳に取りかかったのであるが，訳者の浅学未熟なため，原著の良さがはたしてどこまで訳出できたかどうかが心配である．翻訳に際しては，原著の言わんとするところを誤りなく正確に伝えるだけでなく，翻訳にありがちな読みにくさのない，平易で明快な日本語に訳出するように努力した．

おわりに，原著者ポントリャーギン教授は訳者の願いをこころよくお聞き入れ下さって，この日本語訳のための序文をお寄せ下さったことは訳者にとってまことに光栄であり，心から感謝して教授の今後いっそうのご活躍とご健康をお祈りしたい．

また，福原満洲雄先生には公私いろいろとご多忙なところ，最終原稿を見ていただいて有益なご助言を与えられたばかりでなく，さらにこの訳書の推薦のお言葉までいただいたのは訳者の大きな喜びである．先生のご厚情に対して心からお礼を申しあげたい．

東京大学の木村俊房先生には想像以上のご苦労をおかけしてしまった．膨大な原稿を長期間にわたって始終綿密にお読み下さり，訳者のつたない表現をいたるところこまごまと直して下さったご親切は決して忘れることはできない．訳書としての体裁がととのったのはひとえに先生のお力によるものである．単なる校閲以上の労をこころよくお引き受け下さった先生に深く感謝したい．

最後に，翻訳の機会を与えられ，また出版のためにお力添え下さった立教大学の山中健，三瓶与右衛門両先生にも厚くお礼を申しあげたい．

共立出版の塩谷茂，荻野政三郎両氏は訳者のいろいろな無理な願いをお聞き入れ下さったばかりでなく，めんどうな校正にまでご助力下さった．深く感謝する次第である．

1963年8月

千葉克裕

新版への訳者あとがき

1961 年に Л. С. Понтрягин : Обыкновенные дифференциальные уравнения (Москва) の初版が出版されたが，それからあまり年月がたたないうち 1965 年に同書の増補改訂版が出版された．この新版の翻訳が本書である．旧版の訳書が出版されたのは 1963 年であったから，訳書が出て 2 年もたたないうちに，新版が出たことになる．この新版は，あとでその内容について少し触れるが，旧版の全面的な増補改訂といってもいいほどなので，ものぐさな訳者はまた翻訳しなおすことにいささか当惑してしまったのである．しかし，初版の出版後数年を経ずして全面的な増補改訂版を出すということから考えても，訳者には原著者のこの本の改良に対する並々ならぬ熱意が強く感じられ，この点からも一日もはやく新版の翻訳にとりかからねばと思っているうちに 3 年近い歳月が流れてしまった．訳がかくもおくれてしまったことを，原著者にも，また新版を期待された読者諸氏にも，さらに共立出版の方々にもお詫びしなければならないと思う．

さて，この新版と旧版とのちがいについては，著者がすでに序文において述べているので，訳者の多言は無用と思われるが，念のため二，三述べておこう．

新版では，旧版の第 6 章（線形代数）がまったくそのままの形で補章 II となっており，また第 5 章（安定性）も § 28 を除けば旧版のそれとまったく同じであるが，その他の章は旧版と大なり小なりちがっている．

とくに，新版の補章 I は旧版にはなく，読者の便宜のためまったく新らしく増補されたものである．この中で，ユークリッド空間の点集合に関する初等的な位相的諸概念の解説とともにいくつかの基礎的な命題の証明が丁寧に述べられていることは，初学者にとってまことにありがたいことと思われる．さらに

この補章では，陰関数の存在定理の証明が逐次近似法の応用として述べられている．補章でとくに陰関数の存在定理を取り上げた理由については，著者自身がそこで述べている．

つぎに，新版の第4章（存在定理）も旧版のそれと大きくちがうところである．初期値およびパラメータについての解の連続性，微分可能性に関する部分は全面的に書きかえられ，また，延長不能な解に関する考察があらたに加えられている．

新版と旧版との大きな差異は大体において上に述べたとおりであるが，このほか，§§ 2, 28 も旧版とだいぶちがっている．さらに小さな改訂は随所に見られ，些細な部分をもゆるがせにしない原著者の周到な心づかいには大いに敬服させられる．

おわりに，木村俊房先生に心からお礼を申し上げたい．旧版の翻訳にさいして先生に大変なご苦労をお掛けしてしまったが，このたびもまた非常にご多忙のところ，訳稿をつぶさに読んでいただいた上に，数々のご助言をいただいた．

共立出版の坂野一寿氏には長い間ご迷惑をお掛けしたことをお詫びしたい．同じく共立出版の箸塚誠治氏には校正の段階で非常にお世話になった．

1968 年 3 月

千　葉　克　裕

原 著 者 小 伝

Лев Семенович Понтрягин（リェフ・セミョーノヴィチ・ポントリャーギン）は1908年9月3日にオルローフスキー県のトルブチェフスクに生まれた．父は貧しい勤人であった．母タチヤーナ・アンドリェーエヴナ・ポントリャーギンはヤロスラーフスク県の農家の出で，のちモスクワで洋服の仕立で生活を立てていた．家庭の経済事情は彼が月謝の安い実科学校へ行くことすら許さなかったので，彼は4年制の小学校で最初の教育を受けた．

14才のとき，ポントリャーギンは爆発事故のため不幸にも完全に失明してしまった．このときから，ポントリャーギンの身の立てかた，その他いっさいの世話を母親が引き受けるようになる．彼女は以後長い間，ポントリャーギンに文献を読んで聞かせたり，彼の論文にいろいろな式を書き込んだりして，事実上の秘書としての役割をはたすことになる．そのため彼女は外国語を習いさえした．こうして，彼女は深い愛情と注意とをもって彼につきそった．

1925年にポントリャーギンはモスクワ大学に入学．彼のずばぬけた数学的才能はただちに多くの人達の注意を引いた．彼はとくに位相幾何学，微分幾何学，テンソル解析，代数学などの多方面に大きな興味を持った．驚くべきことに，彼はテンソル解析の最も複雑な公式をも間違いなく記憶したということである．彼は学生のときから位相幾何学に深い関心を持ち，П. С. Александров（パーヴェル・セルゲーヴィチ・アレクサーンドロフ）の門下になった．

ポントリャーギンは19才のときAlexanderの双対法則の精密化に関する最初の論文を発表，1929年にモスクワ大学を卒業した．以後，位相数学に関して幅の広い一連の大きな業績を次々とあげていく．次元論についての重要な研究をいくつか発表したのち，1932年にAlexanderの双対法則の一般化に成功．ついで位相群の研究に移り，可換な位相群の指標群の一般論を建設してこの新しい分野に画期的な進歩をもたらすという数学史上に残る輝かしい成果を収めた．また，連結な局所コンパクトな位相体に関する深い決定的な結果をも証明した．さらに，リー群のベッチ数に関する研究でもみごとな業績をあげ

た．これらの研究結果は彼の歴史的な名著＜連続群＞(1938 年に初版発行）にまとめられた．この労作に対し 1941 年度のスターリン賞が与えられている．この書物の改訂版* (1954 年発行）では本質的と思われる仮定（たとえば可算基についての）さえ取り除かれ，初版よりもはるかに改良されている．

ついでポントリャーギンは，位相幾何学におけるホモトピー論の研究——高い次元の球面から低い次元の球面の中への連続写像の分類の問題——へと進み，ここでも第1級の業績をあげている．

他方，彼は早くから物理学者（とくに A. A. アンドロノーフ）とも交わり，振動論と自動制御論に現われる常微分方程式について研究し，これに関して最初の論文を 1934 年にアンドロノーフと共同で発表している．1935 年にモスクワ大学教授となる．

1952 年以来ポントリャーギンは振動論と自動制御論に関するセミナーを主宰し，ここで彼は物理学や工学の中から数学的な問題を汲みとるという才能を発揮する．そして，自動制御の最適過程の研究においていわゆる＜ポントリャーギンの最大値原理＞を見いだした．この原理は実際問題に対してきわめて広範な応用の可能性を持つものである．1961 年には常微分方程式とその応用に関する上述の一連の研究に対してレーニン賞が与えられた．

ポントリャーギンは偉大な学者であると同時に，また非常にすぐれた教育者でもある．彼の講義はまことに明快でととのっているだけでなく，内容がきわめて豊富であり，証明は細かい部分をもゆるがせにしない．したがって，注意深く講義を聞くものは誰でもその内容をよく理解することができる．このため，ポントリャーギンの講義はそれを聞くものすべてに非常に多くのものを与え，彼は学生たちから深く尊敬されている．1939 年以来ソ連科学アカデミー通信会員，1958 年から正会員．(以上の記事は，ポントリャーギンが 50 才になったのを記念して Успехи Математических Наук (том XIV, вып. 3 (87), 1959 年) 誌上に発表された彼の師である П. С. アレクサーンドロフと門下の Е. Ф. ミッシェンコとの共同執筆になる一文より訳者が適当に抄訳した).

*) 柴岡泰光，杉浦光夫，宮崎功の3氏による邦訳「連続群論」(岩波書店）がある．

索　　引

ア

アダマールの補題……………………………… 175
アドミッタンス…………………………………78
網目電流…………………………………………77
　——の方法……………………………………77
鞍形点………………………… 108, 113, 243, 244
　——の安定接触線…………………… 245, 254
　——の不安定接触線………………… 245, 254
安定
　——な解……………………………………… 260
　——な極限閉軌道…………………………… 217
　——な多項式…………………………………49
　——な平衡点……………………… 102, 196
アンドロノーフ…………………… 235, 240, 263
アンドロノーフ-ウィットの定理……………263

イ

1次従属(解の)…………………………… 116, 128
　——(ベクトルの)……………………………39
1次独立(解の)…………………………… 116, 128
　——(ベクトルの)……………………………39
一様連続………………………………………… 285
インダクタンス…………………………… 73, 74
インピーダンス…………………………………78

エ

遠心制御装置…………………………………… 208

オ

オイラーの公式…………………………………28
ω-極限集合……………………………………… 226
α-極限点………………………………………… 226

カ

解
　安定な——…………………………………… 260
　1階微分方程式の——……………………… 2
　一般——……………………………………… 36, 43
　延長不能な——…………………………16, 162
　行列方程式の——…………………………… 123
　根λに対応する——…………………………62
　実——……………………… 40, 41, 42, 47, 48, 49
　周期——…………………………………………96
　正規形の線形同次方程式系の——…… 86, 88
　線形非同次方程式の特殊——………………55
　漸近安定な——………………………… 197, 260
　定係数の線形同次方程式の——……… 36, 43
　定係数の線形非同次方程式の——…… 55, 56
　定常——……………………………………… 69, 70
　特殊——…………………………………………55
　——の1次従属性……………………… 116, 128
　——の1次独立性……………………… 116, 128
　——の基本系………………………………… 129
　——の定義区間……………………………2, 14
　微分方程式系の——……………………… 14, 18
　微分方程式の——……………………… 2, 14, 25
　複素——…………………………………………25
開集合…………………………………………18, 279
階数
　擬多項式の——…………………………………57
　方程式系の——…………………………………19
解の基本系……………………… 117, 126, 129
　n階線形方程式の——……………………… 138
　定係数の線形同次系の——…………… 36, 43
解の存在と一意性に関する定理……………3, 15
解の連続性と微分可能性に関する定理………
　168, 171, 172, 173, 175
渦状点
　安定な——…………………………………… 109
　不安定な——………………………………… 110
渦心点……………………………………… 109, 110
過程
　過渡的——………………………………………69
　定常——…………………………………………69
関数行列……………………………………… 188

キ

記号的記法………………………………………34
軌道…………………………………………………95

基本系……………………………… 36, 43, 129
球………………………………………… 279
共振……………………………………… 71, 81
行列
　基礎——……………………………… 134
　基本——……………………………… 118
　——の陰関数………………………… 314
　——のジョルダン標準形…………92, 317, 321
　——のスペクトル上で一致する関数…… 309
　——のスペクトル上で定義された関数… 309
　——のベキ級数……………………… 309, 311
　——方程式…………………………… 123
極限点…………………………………… 279
極限閉軌道……………………………… 216
　強い——……………………………… 225, 242
キルヒホフ
　——の第1法則………………………75
　——の第2法則………………………75
近傍……………………………………… 279

ク

クロネッカーの記号……………………61

ケ

結節点
　安定——……………………… 107, 242, 252
　安定退化——………………………… 112
　退化しない——……………………… 242
　不安定——……………… 107, 113, 242, 252
　不安定退化——……………………… 112, 113

コ

後続関数(後続写像)……………… 218, 221, 273
固有振動数(回路の)………………………80
固有値…………………………………… 302
固有直線………………………………… 113
コンパクト……………………………… 283

サ

サイクル………………………………… 96
最小多項式………………………………305
作用素的(記号的)記法………………… 34
3極管の陽極電流…………………………234
最大存在区間…………………………… 21

シ

実解の基本系………………………………42
自動制御の理論………………………… 208
写像……………………………………… 285
　アフィン——…………………………288
　連続——………………………………285
周期…………………………………………97
周期座標………………………………… 104
集合
　——の交わり………………………… 279
　——の和……………………………… 279
　開——………………………………… 279
　コンパクトな——…………………… 283
　閉——………………………………… 279
　補——………………………………… 279
　有界な——…………………………… 281
収束(点列の)…………………………… 281
縮小写像法……………………………… 141, 144
主小行列式…………………………………53
消去法………………………………………59
初期位相………………………………… 23, 67
初期条件…………………………4, 15, 147
初期値……………………………………4, 15
　偏微分方程式の——問題…………… 191
ジョルダン
　——区画………………………………92, 320
　——の標準形…………………92, 320, 321
自律系………………………………………93
真空管発振器…………………………… 234
振動
　強制——…………………………………71
　固有——…………………………………71
　調和——……………………………… 23, 67
　——閉回路………………………………78
振動閉回路の固有振動数…………………80
振幅
　調和振動の——……………………… 23, 67
　複素——…………………………………68

ス

数学的振子…………………………………23

セ

積分曲線……………………………………3, 16

積分定数……44
積分不等式……160
積分方程式
　微分方程式に同値な——……141, 152
漸近安定……196, 260
線分（2点 x, y をむすぶ）……151

ソ

相軌道……99
相空間……99
相互インダクタンス……74
相速度……99
素子
　受動——……74
　2端——……72
　能動——……74
　多端——……75

タ

第1積分……185
　独立な——……187
多項式
　安定な——……49
　擬——……54
　最小——……305
　零化——……304
　特性——……36

チ

逐次近似法……141. 150
重複度
　固有値の——……308
　閉軌道の——……274

テ

定義域……2
定義区間……2, 14
抵抗……73
定数変化法……10, 121, 130
電圧源……74
電位差（電圧降下）……72
電気回路網……75
伝達係数……211
電流源……74

ト

トーラス……104
特殊解……55
特性（3極管の）……234
特性曲線……192
特性系列……86, 317
特性指数……138
特性数……138
特性多項式……36

ニ

2次形式……200
　正の定符号の——……200

ノ

ノルム
　ベクトル関数の——……153
　連続関数の——……142

ハ

ハミルトン系……193
半減期……6
反復関数……274

ヒ

非一様度（運転の）……214
ヴィシニェグラツキー……208
　——のテーゼ……215
微分
　複素関数の——……25
　方程式系にもとづく——……198
微分演算子……35
微分方程式……1
　1階の線形同次——……10
　1階の線形非同次——……10
　1階の線形——……8
　1階の線形偏——……190
　1階の——……2, 140
　最高階数の導関数について解かれた——……19
　調和振動子の——……70
　定係数の線形同次——……34, 36, 42, 43
　定係数の線形非同次——……54, 55
　導関数について解かれた——……2
　同次形の1階——……11

変数分離形の1階——……11
偏——……1
微分方程式系……14, 18
最高階数の導関数について解かれた——……19
周期係数の正規線形同次——……133
自律な——……93
正規化可能な——……66
正規形の——……14
線形——の行列によるあらわしかた……123

フ

複素関数……25
——の虚部……25
——の実部……25
——の導関数……25
微分可能な——……25
連続な——……25
複素振幅の方法……68
不変部分空間……308

ヘ

閉軌道……96
安定な極限——……217
完全不安定な極限——……217
極限——……216
極限——の発生……234
半安定な極限——……217, 226
平衡点……96
安定な——……102, 196
完全不安定な——……206
漸近安定な——……196
退化しない——……242
2階の自律系の——……242
半安定な——……102
閉集合……279
ベクトル
——関数……151
——空間……277
——と数との積……39, 277
——の1次従属性……39
——の1次独立性……39
——の成分……38
——の絶対値(長さ)……150, 277
——の内積……277
——の和……39
固有——……302
実——……38
複素——……38
複素共役な——……38
零——……39, 277
変圧器……81
理想的な——……82
変圧係数……82
変分方程式系……183

ホ

方向の場(ベクトル場)……5, 99
方程式
——系……18
同次形の——……11
同次な——系……31
正規形の——……14
変数分離形の——……11

ム

結び目電圧……77
—の方法……77

ヨ

容量……73

リ

リャプーノフ
——関数……201
——の意味で安定……196, 260
——の意味で漸近安定……196, 260
——の定理……203
リュービルの公式……120, 130
輪環面……104

レ

零化多項式……304
連続写像(関数)……285

ロ

ろ波器(フィルタ)……82
ロンスキー行列式……118, 130

Memorandum

Memorandum

◇紹　介◇

木村俊房

昭和27年3月 東京大学理学部数学科卒業，微分方程式論を専攻，元東京理科大学教授，理学博士
主著：「常微分方程式の解法」（培風館），「常微分方程式」（共立数学講座，共立出版）

千葉克裕

昭和34年立教大学理学部数学科大学院修士課程修了，関数解析を専攻，立教大学理学部講師，東京女子医科大学教授を歴任．
訳書：П.С. アレクサンドロフ著「位相幾何学Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ」（三瓶与右衛門氏と共訳，共立全書），アヒエゼル／グラズマン著「ヒルベルト空間論上・下巻」（共立出版）

ポントリャーギン
常微分方程式
新版

訳者との申合せにより検印を廃止いたします．

1963年10月1日 初版1刷発行
1966年11月25日 初版7刷発行
1968年5月10日 新版1刷発行
2007年9月15日 新版35刷発行

訳者 千葉克裕
発行者 南條光章
東京都文京区小日向4丁目6番19号
印刷者 望月節男
東京都新宿区市谷本村町 3-29

発行所
東京都文京区小日向4丁目6番19号
電話東京3947局2511番（代表）
〒112-8700／振替 00110-2-57035番
URL http://www.kyoritsu-pub.co.jp/
共立出版株式会社

NDC 413.62　印刷所・新日本印刷　製本所・関山製本社

社団法人
自然科学書協会
会員

IBSN 4-320-01038-8